MATEMATISKA VETENSKAPER
Chalmers tekniska högskola
Examinator: Geir Bogfjellmo Tel: 0725-796742

TMA671 2016
2016–10–08 kl 08:30-12:30
Hjälpmedel: Inga

TMA671 Linjär Algebra och Numerisk Analys

Tentamen

Renskriv dina lösningar, lämna ej in kladdpapper! Poängavdrag ges för dåligt motiverade, svårtolkade eller svårläsliga lösningar.

Tentan består av 8 uppgifter, med varierande antal deluppgifter.

Maximalt antal poäng är 60, och betygsgränserna är 30 för 3 (godkänd), 42 för 4 och 54 för 5. Upp till 10 bonuspoäng från bonusuppgifter får tillgodoräknas.

Lycka till!

Geir

1. **(8 p)**

Följande rad av matriser beskriver en delvis Gauss-elimination av matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2-2R_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3+2R_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

(Notationen $R_2 - 2R_1$ innebär att 3 gånger rad 1 dras från rad 2.)

(a) Slutför Gausseliminationen utan pivotering. (1 p)

Lösning:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3+R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

(b) Använd Gausseliminationen till att bestämma en LU-faktorisering av A. (2 p)

Lösning: Läser från Gausseliminationen

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -2-1 & 1 & \end{pmatrix}$$

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

(c) Lös ekvationssystemet

$$A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

utan att Gausseliminera på nytt. (3 p)

Lösning:

$$L(U\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ger

$$U\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

och därefter

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

(d) Beskriva hur du kan använda den kompakta QR-faktorisering av en $m \times n$ matris B, där $m \geq n$, för att lösa minstakvadratproblemet (2 p)

$$\min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} \|B\mathbf{x} - \mathbf{b}\|_2.$$

Lösning: MK-problemet genom vid att lösa ekvationen

$$B^\top B\mathbf{x} = B^\top \mathbf{b}$$

Då $B = QR$ kan vi även skriva

$$R^\top Q^\top QR\mathbf{x} = R^\top R\mathbf{x} = R^\top Q^\top \mathbf{b}.$$

Har R rang lika n, kan vi förenkla

$$R\mathbf{x} = Q^\top \mathbf{b}.$$

2. **(8 p)**

(a) Förklara vad som menas med att en uppställning vektorer $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n\}$ i et linjärt rum U är linjärt oberoende. (2 p)

Lösning: Uppställningen är linjärt oberoende om

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mathbf{u}_i = 0 \Rightarrow \lambda_i = 0 \text{för alla } i$$

(b) Låt $T\colon U \to W$ vara en linjär transformation, och anta att $\{T(\mathbf{u}_1), \dots, T(\mathbf{u}_n)\}$ är linjärt oberoende vektorer i W. Visa att även $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n\}$ är linjärt oberoende. (3 p)

Lösning: Antar vi har en linjärkombination av vektorerna som är lika noll

$$0 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mathbf{u}_i$$

Har då också

$$0 = T(0) = T\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mathbf{u}_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i T(\mathbf{u}_i)$$

Då $\{T(\mathbf{u}_1), \dots, T(\mathbf{u}_n)\}$ är linjärt oberoende vet vi nu att $lambda_i = 0$ för alla i.

(c) Låt T vara som i (b), och anta att $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ är linjärt oberoende vektorer i U. Kan du med säkerhet säga att $\{T(\mathbf{v}_1), \dots, T(\mathbf{v}_n)\}$ är linjärt oberoende? Varför/varför inte? (3 p)

Lösning: Nej, det kan vi inte. Da kan till exempel vara så att någon $\mathbf{v}_i$ ligger i nollrummet till T.

3. **(8 p)**

I den här uppgiften betraktar vi $C[0, 1]$, det vill säga rummet av reella kontinuerliga funktioner på $[0, 1]$, med skalärprodukt

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x)g(x)\mathrm{d}x.$$

Ortogonalprojektionen av en funktion f på et underrum U är en funktion Pf så att $f - Pf$ är i Us ortogonala komplement.

(a) Visa att $\langle Pf, g \rangle = \langle f, g \rangle$ för alla $g \in U$. (2 p)

Lösning: Då g är i U och $f - Pf$ är i Us ortogonala komplement har vi

$$\langle f - Pf, g \rangle = 0$$

Anta att U är ändligdimensionell, och låt $\{g_1, \dots, g_n\}$ vara en bas för U. Då kan $Pf \in U$ skrivas $Pf(x) = y_1 g_1(x) + \dots + y_n g_n(x)$.

(b) Härled följande linjära ekvationssystem för koefficienterna $y_1, \dots, y_n$. (2 p)

$$\sum_{j=1}^{n} \langle g_i, g_j \rangle y_j = \langle f, g_i \rangle$$

Lösning: Då $g_i \in U$, skall vi ha att $\langle g_i, Pf \rangle = \langle g_i, f \rangle$ för alla i. Sätter inn $Pf = \sum_{j=1}^{n} y_j g_j$ och får

$$\langle g_i, \sum_{j=1}^{n} y_j g_j \rangle = \sum_{j=1}^{n} y_j \langle g_i, g_j \rangle = \langle g_i, f \rangle$$

(c) Visa att ekvationssystemet alltid har en lösning. (4 p)

Lösning: Matrisen till ekvationssystemet er $A_{ij} = \rangle g_i, g_j\langle$. Har matrisen full rang, har ekvationssystemet lösning. Kan vi visa att $A\mathbf{y} = 0$ innebär att $\mathbf{y} = 0$, vet vi att matrisen har full rang. Skriver $\mathbf{y} = [y_1, \ldots, y_n]^\top$ och antar att

$$[A\mathbf{y}]_i = \sum_{j=1}^{n} \langle g_i, g_j\rangle y_j = \langle g_i, \sum_{j=1}^{n} y_j g_j\rangle = 0$$

för alla i.

Då $\{g_1, \ldots, g_n\}$ är en bas för U, har vi att $\langle g, \sum_{j=1}^n y_j g_j\rangle = 0$ för alla $g \in U$. Vektoren $\sum_{j=1}^n y_j g_j$ är då i båda i U, då den är en linjär kombination av vektorer i U, och i Us ortogonala komplement. Det innebär att $\sum_{j=1}^n y_j g_j = 0$. Då $\{g_1, \ldots, g_n\}$ är en bas, är de också linjärt oberoende, och vi kan sluta att $y_j = 0$ för alla j.

(d) Beräkna ortogonalprojektionen av funktionen $f(x) = \sin(\pi x)$ på underrummet av första grads polynom, $P_1 = \{\alpha_1 x + \alpha_0 \text{ där } \alpha_0, \alpha_1 \in \mathbb{R}\} \subset C[0,1]$ (2 p)

Det uppges att

$$\int_0^1 \sin(\pi x)\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}$$
$$\int_0^1 x\sin(\pi x)\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}$$

Lösning: Använder basen $g_0(x) = 1, g_1(x) = x$, och utformar ekvationssystemet från (b).

$$\begin{aligned}
\langle g_0, g_0\rangle &= \int_0^1 1\cdot 1\mathrm{d}x && = 1\\
\langle g_0, g_1\rangle &= \int_0^1 1\cdot x\mathrm{d}x && = \frac{1}{2}\\
\langle g_1, g_1\rangle &= \int_0^1 x\cdot x\mathrm{d}x && = \frac{1}{3}\\
\langle g_0, f\rangle &= \int_0^1 1\cdot \sin(\pi x)\mathrm{d}x && = \frac{2}{\pi}\\
\langle g_1, f\rangle &= \int_0^1 x\cdot \sin(\pi x)\mathrm{d}x && = \frac{1}{\pi}
\end{aligned}$$

Så

$$A = \begin{pmatrix} \langle g_0, g_0\rangle & \langle g_0, \rangle g_1 \\ \langle g_1, g_0\rangle & \langle g_1, \rangle g_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$
$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} \langle g_1, f\rangle \\ \langle g_2, f\rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{\pi} \\ \frac{1}{\pi} \end{bmatrix}$$

Att bestämma Pf innebär att lösa ekvationssystemet

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{\pi} \\ \frac{1}{\pi} \end{bmatrix}$$

Lösningen är $\alpha_0 = \frac{2}{\pi}$, $\alpha_1 = 0$, som innebär att

$$Pf(x) = \frac{2}{\pi}\cdot 1 + 0\cdot x = \frac{2}{\pi}$$

4. **(10 p)**

Här kommer 5 par av påstående, i par (P1) och (P2). Uppgiften består i följande: Anta att påstående (P1) är sant och avgör om påstående (P2) *måste vara sant*, *kan vara sant* eller *inte kan vara sant*. Ange motivering till dina svar.

(a) **(P1)** För en matris $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, gäller det att $(A-3I)(A-I)=0$.
(P2) 1 eller 3, eller båda, är egenvärde(n) till A . (2 p)
Lösning: *Måste vara sant.* Vi har att

$$(A-3I)(A-I)\mathbf{v}=0$$

för alla nollskilda vektorer $\mathbf{v}$ Antigen är $(A-I)\mathbf{v}=0$, det vill säga att $\mathbf{v}$ är egenvektor med tillhörande egenvärde 1, eller så är $(A-I)\mathbf{v}$ nollskild och en egenvektor med tillhörande egenvärde 3.

(b) **(P1)** Matrisen $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ är diagonaliserbar.
(P2) A har en invers. (2 p)
Lösning: *Kan vara sant.* $A = VDV^{-1}$ för någon inverterbar matris V och diagonalmatris D. Om alla elementer på Ds diagonal er nollskilda, har D invers och $A^{-1} = VD^{-1}V^{-1}$, annars är A inte inverterbar.

(c) **(P1)** Vektorerna $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots \mathbf{v}_{n+1}\}$ i $\mathbb{R}^n$ är alla egenvektorer till samma matris $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$.
(P2) $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_{n+1}\}$ tillhör olika egenvärder. (2 p)
Lösning: *Kan inte vara sant.* En $n\times n$-matris har högst n olika egenvärder.

(d) **(P1)** Matrisen $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ är symmetrisk.
(P2) A kan skrivas på formen (2 p)

$$A = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mathbf{v}_i \mathbf{v}_i^\top.$$

Lösning: *Måste vara sant.* Följer av diagonalsatsen.

(e) **(P1)** $A = I - 2\mathbf{v}\mathbf{v}^\top \in \mathbb{R}^{5\times 5}$.
(P2) A har två egenvärden: 1 och -1. (2 p)
Lösning: *Kan vara sant.* Om $\mathbf{u}$ står ortogonalt på $\mathbf{v}$, så är

$$A\mathbf{u} = (I - 2\mathbf{v}\mathbf{v}^\top)\mathbf{u} = \mathbf{u} - 2\mathbf{u}\cdot 0 = \mathbf{w}.$$

Det vill säga att 1 är egenvärde till A med tillhörande egenrum $\mathbf{v}^\perp = \{u \text{ så att } u^\top v = 0\}$ Är $\mathbf{u} = \lambda\mathbf{v}$, så är

$$A\mathbf{u} = (I - 2\mathbf{v}\mathbf{v}^\top)\mathbf{u} = \mathbf{u} - \lambda\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}^\top\mathbf{v} = (1 - 2\mathbf{v}^\top\mathbf{v})\mathbf{u}$$

Det vill säga att $1-2\mathbf{v}^\top\mathbf{v}$ är egenvärde till A med tillhörande egenrum span($\mathbf{v}$). (P1) är sant om $\mathbf{v}$ är normerad, annars inte.

5. **(8 p)**

I den här uppgiften betraktar vi numerisk lösning av det endimensionella optimeringsproblemet

$$\min_x f(x)$$

där $f(x) = x^2 + e^x$

(a) Visa att funktionen har exakt ett lokalt minimum x^*, och at det fins i intervallet $[-1, 0]$. (2 p)
Lösning:

$$f^{'}(x) = 2x + e^x$$
$$f^{''}(x) = 2 + e^x$$

Då $f^{''}(x) > 0$ för alla x, har funktionen maximalt ett stationärt punkt där $f^{'}(x) = 0$, och det är ett minimum. Vi har också att

$$f^{'}(-1) = -2 + e^{-1} < -2 + 1 < 0$$
$$f^{'}(0) = 1 > 0$$

$f^{'}$ har därmed minst ett nollpunkt i intervallet $[-1, 0]$

(b) Skriv upp iterationsformeln för Newtons metod tillämpad på optimeringsproblemet, och utför ett steg från startvärdet $x_0 = 0$. (2 p)

Lösning: I optimeringsproblem löser vi $f^{'}(x) = 0$, det vill säga att Newtons metod har iterationsformeln

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f^{'}(x_k)}{f^{''}(x_k)} = x_k - \frac{2x_k + e^{x_k}}{2 + e^{x_k}}$$

Med $x_0 = 0$, får vi

$$x_1 = 0 - \frac{1}{3} = -\frac{1}{3}$$

(c) Bestäm en uppskattning av felet för x_1 du beräknade i (b), baserad på det numeriska värdet $e^{x_1} \approx 0.7165$ och $f^{''}(x) > 2$ för alla x. (2 p)

Lösning: Taylor's formel ger att $f^{'}(x_1) - f^{'}(x^*) = f^{'}(x_1) - 0 = f^{''}(\xi)(x_1 - x^*)$ för någon ξ mellan x och x^*. Det innebär att

$$|x_1 - x^*| = \left|f^{'}(x_1)f^{''}(\xi)\right| < \frac{|f^{'}(x_1)|}{2} \approx \frac{2/3 + 0.7165}{2} \approx 0.6916$$

(d) I et flyttalssystem med avrundingsenhet μ konvergerar Newtons metod till ett representerbart tal x_n så att $f'(x_n)$ beräknat i flyttal blir exakt lika 0. Bestäm en uppskattning av skillnaden $|x_n - x^*|$. (2 p)

Lösning: Att $fl(f^{'}(x_n)) = fl(2x_n + e^{x_n}) = 0$, innebär att $-fl(e^{x_n}) = fl(2x_n) = 2x_n$. (Är x_n representerbart, är även $2x_n$ det.) Det vill säga att $2x_n + e^{x_n} \leq \mu\,|2x_n| \leq 2\mu$, då för $x_n \in [-1, 0]$ gäller $|x_n| \leq 1$.

6. Vi betraktar en funktion **(8 p)**

$$f(x) = \begin{cases} x + x^2, & x < 0 \\ x - x^2, & x \geq 0 \end{cases}$$

(a) Estimera $f'(0)$ vid att använda centraldifferens och steglängd $h = 0.1$ och $h = 0.01$. (1 p)

(b) Beräkna en formel för approximationen du får för $f'(0)$ när du använder centraldifferens och godtycklig steglängd $h > 0$. (2 p)

Lösning: Centraldifferens är approximationen

$$f^{'}(0) \approx \frac{f(h) - f(-h)}{2h} = \frac{h - h^2 - (-h + (-h)^2)}{2h} = \frac{2h - 2h^2}{2h} = 1 - h$$

Lösning för (a) fås genom att sätta $h = 0.1$, $h = 0.01$

(c) Jämställ med det exakta värdet $f'(0) = 1$. Vad är trunkeringsfelet för centraldifferensen i det här fallet? (2 p)

Lösning: Trunkeringsfelet är (exakt värde)-(approximerad värde)
$= 1 - (1 - h) = h$

(d) I boken står det att centraldifferens för $f'(x)$ har trunkeringsfel på formen $b_1h^2 + b_2h^4 + \cdots$. Varför gäller det inte i det här fallet? (3 p)

Lösning: Trunkeringsfel för centraldifferens härledas genom att använda Taylors formel och skriva

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + \frac{1}{2}f^{''}(x)h^2 + \frac{1}{3!}f^{(3)}(0)h^3 + \cdots$$
$$f(x-h) = f(x) - f'(x)h + \frac{1}{2}f^{''}(x)h^2 - \frac{1}{3!}f^{(3)}(0)h^3 + \cdots$$

Den här tillämpningen av Taylors formel kräver att f har derivata av alla ordningar i x. För den aktuella funktionen, är f endast en gång deriverbar i $x = 0$.

7. I den här uppgiften studerar vi kvadraturformler för integration **(4 p)**

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \sum_{i=1}^{n} w_i f(x_i) + R_T$$

(a) Låt kvadraturpunkterna x_i vara givna. Vi önskar att bestämma vikter w_i så att kvadraturformeln $\sum_{i=1}^{n} w_i f(x_i)$. är exakt för polynomer upp till ordning $n-1$. Härled ett system av linjära ekvationer för vikterna w_i. (3 p)

Lösning: För $j = 0, 1, \ldots, n-1$ ska vi ha att

$$\begin{aligned} Q(x^j) &= I(x^j) \\ \sum_{i=1}^{n} w_i x_i^j &= \int_0^1 x^j \mathrm{d}x \\ \sum_{i=1}^{n} w_i x_i^j &= \frac{1}{j+1} \end{aligned}$$

(b) Matrisen för systemet av ekvationer du beräknade i (a) är oftast illa konditionerad. Förklara vilken konsekvens det har för numerisk beräknade vikter w_i. (1 p)

Lösning: Det innebär att felen i de numerisk beräknade vikterna vill vara stor i förhållande till avrundningsfelet i matriselementen x_i^j och felet i elementen till högersidan $\frac{1}{j+1}$.

8. **(6 p)**

Vi betraktar ett system av ekvationer i flera variabler

$$f(\mathbf{x}) \begin{pmatrix} x_1^2 + x_2^2 - 1 \\ x_1 x_2 - \frac{1}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(a) Beräkna Jacobianen till f. (2 p)

Lösning:

$$J = \begin{pmatrix} 2x_1 & 2x_2 \\ x_2 & x_1 \end{pmatrix}$$

(b) Sätt $\mathbf{x}_0 = \frac{1}{0}$, och utför ett steg med Newtons metod för system av ekvationer. (3 p)

Lösning: Ekvationen

$$J\mathbf{s}_1 = -f(\mathbf{x}_0)$$

har lösning

$$\mathbf{s}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

Så

$$\mathbf{x}_1 = \mathbf{x} = 0 + \mathbf{s}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

(c) För vilka startvärder är Newtons metod inte definierad? (1 p)

Lösning: Newtons metod är inte definierad när J är singulär. Det vill säga när $\det J = 2x_1^2 - 2x_1^2 = 0$.