LANA 2016 Demo 1 - 1

LA1.2 $V := \mathbb{R}_+ = \{a \in \mathbb{R} : a > 0\}$ med operationer $a \oplus b = ab$, $\alpha \odot a = a^\alpha$. Visa att V med dessa operationer är ett vektorrum.

Lösning Vi ska kontrollera definitionens tio kriterier (axiom):

(1) Väldefinierad addition: $\exists$ entydigt $a \oplus b \in V$.

(2) Väldefinierad multiplikation med skalär: $\exists$ entydigt $\alpha \odot a \in V$.

(3) Kommutativ addition: $a \oplus b = b \oplus a$.

(4) Associativ addition: $a \oplus (b \oplus c) = (a \oplus b) \oplus c$.

(5) Nollelement: $\exists\, \mathbf{0} \in V : a \oplus \mathbf{0} = a \ \forall a \in V$.

(6) Additiv invers: $\forall a \in V \ \exists -a \in V : a \oplus (-a) = \mathbf{0}$.

(7) Associativ multiplikation med skalär: $\alpha \odot (\beta \odot a) = (\alpha\beta) \odot a$.

(8) Distributivitet 1: $\alpha \odot (a \oplus b) = \alpha \odot a \oplus \alpha \odot b$

(9) Distributivitet 2: $(\alpha + \beta) \odot a = \alpha \odot a \oplus \beta \odot a$

(10) Neutral etta: $1 \odot a = a \ \forall a \in V$.

Vi kontrollerar:

(1): $a \oplus b = ab$ är positivt och reellt, så $a \oplus b \in V \ \forall a, b \in V$.

(2): $\alpha \odot a = a^\alpha \in V \ \forall a \in V$ eftersom reella potenser av positiva tal är positiva.

(3): $a \oplus b = ab = ba = b \oplus a$.

(4): $a \oplus (b \oplus c) = a \oplus (bc) = a(bc) = (ab)c = (ab) \oplus c = (a \oplus b) \oplus c$

(5): Vi försöker lösa $a \oplus \mathbf{0} = a \ \forall a \in V$, alltså $a\mathbf{0} = a \ \forall a \in V$
$\iff \mathbf{0} = 1$ (så talet 1 är nollelement $\mathbf{0}$ i rummet V).

(6): Vi försöker lösa $a \oplus (-a) = \mathbf{0} \iff a(-a) = 1$
$\iff (-a) = \frac{1}{a}$, så $-a = \frac{1}{a} \ \forall a \in V$
(detta är väldefinierat eftersom $a > 0$).

(7): $\alpha \odot (\beta \odot a) = \alpha \odot (a^\beta) = (a^\beta)^\alpha = a^{\alpha\beta} = (\alpha\beta) \odot a$.

(8): $\alpha \odot (a \oplus b) = \alpha \odot (ab) = (ab)^\alpha = a^\alpha b^\alpha = a^\alpha \oplus b^\alpha$
$= \alpha \odot a \oplus \beta \odot b$.

(9): $(\alpha + \beta) \odot a = a^{\alpha+\beta} = a^\alpha a^\beta = a^\alpha \oplus a^\beta = \alpha \odot a \oplus \beta \odot a$.

(10): $1 \odot a = a^1 = a$.

LANA 2016 Demo 1-2

LA1.3 $V := \mathbb{R}^2$ med operationer

$$(x_1, x_2) \oplus (y_1, y_2) = (x_1 + y_1 + 1,\ x_2 + y_2 + 1),$$
$$\alpha \odot (x_1, x_2) = (\alpha + \alpha x_1 - 1,\ \alpha + \alpha x_2 - 1).$$

Visa att V är ett vektorrum.

Lösning Som i LA1.2 kontrollerar vi de tio axiomen:

(1), (2): Vi ser lätt att såväl $(x_1, x_2) \oplus (y_1, y_2)$ som $\alpha \odot (x_1, x_2)$ är entydiga element i $\mathbb{R}^2$.

(3): $(x_1, x_2) \oplus (y_1, y_2) = (x_1 + y_1 + 1,\ x_2 + y_2 + 1) = (y_1 + x_1 + 1,\ y_2 + x_2 + 1)$
$= (y_1, y_2) \oplus (x_1, x_2)$.

(4): $(x_1, x_2) \oplus \big((y_1, y_2) \oplus (z_1, z_2)\big) = (x_1, x_2) \oplus (y_1 + z_1 + 1,\ y_2 + z_2 + 1)$
$= (x_1 + (y_1 + z_1 + 1) + 1,\ x_2 + (y_2 + z_2 + 1) + 1)$
$= ((x_1 + y_1 + 1) + z_1 + 1,\ (x_2 + y_2 + 1) + z_2 + 1)$
$= (x_1 + y_1 + 1,\ x_2 + y_2 + 1) \oplus (z_1, z_2) = \big((x_1, x_2) \oplus (y_1, y_2)\big) \oplus (z_1, z_2)$.

(5): Löser $(x_1, x_2) \oplus \underbrace{(n_1, n_2)}_{\text{nollelement}} = (x_1, x_2) \quad \forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$

$\iff (x_1 + n_1 + 1,\ x_2 + n_2 + 1) = (x_1, x_2) \quad \forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$

$\iff (n_1, n_2) = (-1, -1) \in \mathbb{R}^2$. Nollelement är $\mathbf{0} = (-1, -1)$.

(6): Löser $(x_1, x_2) \oplus \underbrace{(m_1, m_2)}_{= -(x_1, x_2)} = \mathbf{0} = (-1, -1)$

$\iff (x_1 + m_1 + 1,\ x_2 + m_2 + 1) = (-1, -1)$

$\iff (m_1, m_2) = (-x_1 - 2,\ -x_2 - 2) \in \mathbb{R}^2$.

(7) $\alpha \odot (\beta \odot (x_1, x_2)) = \alpha \odot (\beta + \beta x_1 - 1,\ \beta + \beta x_2 - 1)$
$= (\alpha + \alpha(\beta + \beta x_1 - 1) - 1,\ \alpha + \alpha(\beta + \beta x_2 - 1) - 1)$
$= (\alpha\beta + \alpha\beta x_1 - 1,\ \alpha\beta + \alpha\beta x_2 - 1)$
$= (\alpha\beta) \odot (x_1, x_2)$

(8) $\alpha \odot \big((x_1, x_2) \oplus (y_1, y_2)\big) = \alpha \odot (x_1 + y_1 + 1,\ x_2 + y_2 + 1)$
$= (\alpha + \alpha(x_1 + y_1 + 1) - 1,\ \alpha + \alpha(x_2 + y_2 + 1) - 1)$
$= ((\alpha + \alpha x_1 - 1) + (\alpha + \alpha y_1 - 1) + 1,\ (\alpha + \alpha x_2 - 1) + (\alpha + \alpha y_2 - 1) + 1)$
$= (\alpha + \alpha x_1 - 1,\ \alpha + \alpha x_2 - 1) \oplus (\alpha + \alpha y_1 - 1,\ \alpha + \alpha y_2 - 1)$
$= \alpha \odot (x_1, x_2) \oplus \alpha \odot (y_1, y_2)$

LANA 2016 Demo 1 - 3

LA 1.3 (forts.)

(9): $(\alpha+\beta)\odot(x_1,x_2) = ((\alpha+\beta)+(\alpha+\beta)x_1-1, (\alpha+\beta)+(\alpha+\beta)x_2-1)$

$= ((\alpha+\alpha x_1-1)+(\beta+\beta x_1-1)+1, (\alpha+\alpha x_2-1)+(\beta+\beta x_2-1)+1)$

$= (\alpha+\alpha x_1-1, \alpha+\alpha x_2-1)\oplus(\beta+\beta x_1-1, \beta+\beta x_2-1)$

$= \alpha\odot(x_1,x_2)\oplus\beta\odot(x_1,x_2)$

(10): $1\odot(x_1,x_2) = (1+1x_1-1, 1+1x_2-1) = (x_1,x_2)$.

LA 1.4 $V = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x,y\geq 0\}$ (1:a kvadranten)
med vanliga operationer $u\oplus v = u+v$, $\alpha\odot u = \alpha u$.

(a) Om $u,v\in V$, gäller $u\oplus v\in V$?

Lösning Skriv $u=(u_1,u_2)$, $v=(v_1,v_2)$, $u_1,u_2,v_1,v_2\geq 0$.
$u\oplus v = (\underbrace{u_1+v_1}_{\geq 0}, \underbrace{u_2+v_2}_{\geq 0})\in V$, så: Ja $u\oplus v\in V$.

(b) Om $u\in V$, gäller $c\odot u\in V$?

Lösning $c\odot u = (cu_1, cu_2)$, men cu_1 är ej positivt om $u_1>0$ och $c<0$, t. ex. om $u=(1,1)\in V$, $c=-1$, $c\odot u = (-1,-1)\notin V$, så: Nej, inte alltid.

(c) Är V ett vektorrum?

Lösning V uppfyller inte det andra axiomet i definitionen (det om väldefinierad multiplikation med skalär) $c\odot u\in\mathbb{R}^2$, men ej alltid $c\odot u\in V$, så:
Nej, V är inte ett vektorrum.

LSNA 2016 Demo 1-4

LA 1.7 $M := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \le 1\}$ (dvs. enhetscirkelskivan).
Visa att M inte är ett underrum till $\mathbb{R}^2$.

Lösning Ett underrum är en delmängd som själv utgör ett vektorrum, man kan visa att (sats 1.1) M är ett underrum om och endast om

$u, v \in M \Rightarrow u+v \in M$ (slutet under addition)

$\alpha \in \mathbb{R}, u \in M \Rightarrow \alpha u \in M$ (slutet under multiplikation med skalär).

Här räcker det att hitta ett enda motexempel (det finns många).
T.ex: $u = (0,1) \in M$, $v = (0,1) \in M$, men $u+v = (0,2) \notin M$
då $0^2+1^2 = 1 \le 1$, men $0^2+2^2 = 4 > 1$.

LA 1.8 Vilka av de givna delmängderna till $\mathcal{P}_n$ (polynom av grad $\le n$) är underrum?

något tillräckligt stort n

(a) $\{p(t) = at^2,\ a \in \mathbb{R}\} =: Q_n$

Lösning Sats 1.1: $Q_n \subset \mathcal{P}_n$ är ett underrum om och endast om
$p, q \in Q_n,\ \alpha, \beta \in \mathbb{R} \implies \alpha p + \beta q \in Q_n$.
Här gäller $p, q \in Q_n \implies p(t) = at^2,\ q(t) = bt^2$ för några $a, b \in \mathbb{R}$,
så $\alpha p(t) + \beta q(t) = \alpha a t^2 + \beta b t^2 = \underbrace{(\alpha a + \beta b)}_{\in \mathbb{R}} t^2 \in Q_n$.

$\therefore$ Q_n är ett underrum.

(c) $Q_n := \{p \in \mathcal{P}_n : p(0) = 0\}$

Lösning. Låt $p, q \in Q_n$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ och bilda $r := \alpha p + \beta q \in \mathcal{P}_n$
Om vi kan garantera att $r(0) = 0$, dvs. $r \in Q_n$ så är Q_n ett underrum. Det kan vi eftersom
$r(0) = \alpha p(0) + \beta q(0) = \alpha 0 + \beta 0 = 0$.
$\therefore$ Q_n är ett underrum.

(e) $Q_n := \{p \in \mathcal{P}_n : p(t) \ge 0,\ t \in [0,1]\}$

Lösning. Q_n är ej ett underrum. Motexempel: $p(t) = 1 \in Q_n$,
men $-p(t) = -1 \notin Q_n$.

(g) $Q_n := \{p \in \mathcal{P}_n :$ alla koefficienter är heltal$\}$

Lösning Ej underrum. Motexempel: $p(t) = 1 \in Q_n$, men $\frac{1}{2}p(t) = \frac{1}{2} \notin Q_n$.

LANA 2016 Demo 1-5

LA 1.9 Vilka av mängderna är underrum till $\mathbb{R}^4$? Vilka är affina mängder?
(Affin mängd: En mängd på formen $v + U = \{u + v : u \in U\}$ för något underrum $U \subset V$ och vektor $v \in V$. Obs! Alla underrum $U \subset V$ är affina mängder med $v = 0$.)

(a) $M := \{x \in \mathbb{R}^4 : 3x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = 0\}$

Lösning Ta $x, y \in M$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, och bilda $z = \alpha x + \beta y$.

$$
\begin{aligned}
3z_1 - 2z_2 + z_3 - z_4 &= 3(\alpha x_1 + \beta y_1) - 2(\alpha x_2 + \beta y_2) \\
&\quad + (\alpha x_3 + \beta y_3) - (\alpha x_4 + \beta y_4) \\
&= \alpha \underbrace{(3x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4)}_{=0 \text{ då } x \in M} + \beta \underbrace{(3y_1 - 2y_2 + y_3 - y_4)}_{=0 \text{ då } y \in M} = 0
\end{aligned}
$$

så $z = \alpha x + \beta y \in M \implies M$ är ett underrum (och affin mängd).

(c) $M := \{x \in \mathbb{R}^4 : x = s\underbrace{(2,3,4,5)}_{=:u} + t\underbrace{(6,7,8,9)}_{=:v},\ s, t \in \mathbb{R}\}$

Lösning Ta $x, y \in M$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Skriv $x = s_x u + t_x v$, $y = s_y u + t_y v$.

$$
\begin{aligned}
\alpha x + \beta y &= \alpha(s_x u + t_x v) + \beta(s_y u + t_y v) \\
&= \underbrace{(\alpha s_x + \beta s_y)}_{\in \mathbb{R}} u + \underbrace{(\alpha t_x + \beta t_y)}_{\in \mathbb{R}} v \in M
\end{aligned}
$$

$\implies M$ är ett underrum, därmed också affin mängd.

(e) $M := \{x \in \mathbb{R}^4 : x = (1,2,0,1) + t(0,1,2,2),\ t \in \mathbb{R}\}$.

Lösning M är inte ett underrum. Motexempel $x_1 = 1 \ \forall x \in M$, men om $x, y \in M$, $z = x + y$ så gäller $z_1 = x_1 + y_1 = 2$ så $z \notin M$.

M är däremot en affin mängd ty

$$
M = (1,2,0,1) + \underbrace{\{u \in \mathbb{R}^4 : u = t(0,1,2,2),\ t \in \mathbb{R}\}}_{\text{ett underrum på samma sätt som i (c)}}
$$

LA 1.9 (forts.)

(g.) $M := \{x \in \mathbb{R}^4 : x_1^2 + x_2^2 = 0\}$

Lösning Observera att $x_1^2 + x_2^2 = 0 \Longleftrightarrow x_1 = x_2 = 0$, så om $x, y \in M$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $z = \alpha x + \beta y$ gäller

$z_1 = \alpha x_1 + \beta y_1 = \alpha 0 + \beta 0 = 0$, och på samma sätt $z_2 = 0$,

så $z = \alpha x + \beta y \in M \Longrightarrow M$ är underrum och affin mängd.

(h) $M := \{x \in \mathbb{R}^4 : x_1^2 + x_2^2 = 1\}$

Lösning M är inte ett underrum. Motexempel: $(1,0,0,0), (0,1,0,0) \in M$, men $(1,1,0,0) = (1,0,0,0) + (0,1,0,0) \notin M$.

M är inte en affin mängd heller. Om vi antar $M = v + U$ för någon fix vektor $v \in \mathbb{R}^4$ och något underrum $U \subset \mathbb{R}^4$ får vi

$1 = x_1^2 + x_2^2 = (v_1 + u_1)^2 + (v_2 + u_2)^2 \quad \forall u \in U$,

så ~~XXX~~ $(1-v_1, 0, 0, 0), (0, 1-v_2, 0, 0) \in U$, men $(1-v_1, 1-v_2, 0, 0) \notin U$ vilket motsäger antagandet att U är ett underrum.

LA 1.10 Är M underrum till V om ...

(a) ... $V := C(\mathbb{R})$, $M := \{f \in V : f(-x) = f(x) \ \forall x \in \mathbb{R}\}$?

Lösning Ta $f, g \in V$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ och bilda $h = \alpha f + \beta g$.

$h(-x) = \alpha f(-x) + \beta g(-x) = \alpha f(x) + \beta g(x) = h(x)$,

så $h = \alpha f + \beta g \in M \Rightarrow M$ är ett underrum.

(c) ... $V := C([0,1])$, $M := \{f \in V : f(0) = 1\}$?

Lösning Inte ett underrum. Motexempel: $\frac{1}{2} f(0) = \frac{1}{2}$ så $\frac{1}{2} f \notin M$ då $f \in M$.

(e) ... $V := C([a,b])$, $M := \{f \in V : f(a) = f(b)\}$?

Lösning. $f, g \in M$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $h := \alpha f + \beta g$. Då gäller

$h(a) = \alpha f(a) + \beta g(a) = \alpha f(b) + \beta g(b) = h(b)$

$\Longrightarrow h = \alpha f + \beta g \in M \Longrightarrow M$ är ett underrum.

LANA 2016 Demo 1–7

LA 1.10 (forts.)

((g))... $V := \mathbb{R}^{n\times n}$, $M := \{A \in V : sp(A) = 0\}$
($sp(A) = \sum_i a_{ii}$, spåret av A)?

Lösning $A, B \in V$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $C := \alpha A + \beta B$

$$sp(C) = sp(\alpha A + \beta B) = \sum_i c_{ii} = \sum_i (\alpha a_{ii} + \beta b_{ii})$$
$$= \alpha \sum_i a_{ii} + \beta \sum_i b_{ii} = \alpha\, sp(A) + \beta\, sp(B) = \alpha 0 + \beta 0 = 0$$
$$\Rightarrow C = \alpha A + \beta B \in M \Rightarrow M \text{ är ett underrum.}$$

((i))... $V := C(\mathbb{R})$, $M := \{f \in V : \int_{-\infty}^{\infty} f(x)^2 e^{-x^2}\,dx < \infty\}$?

Lösning $f, g \in M$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Vi vill visa att

$$\int_{-\infty}^{\infty} (\alpha f(x) + \beta g(x))^2 e^{-x^2}\,dx < \infty.$$

Observera att $0 \le (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \Rightarrow 2ab \le a^2 + b^2$
och $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \le 2a^2 + 2b^2$, så

$$\int_{-\infty}^{\infty} (\alpha f(x) + \beta g(x))^2 e^{-x^2}\,dx \le \alpha^2 \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} f(x)^2 e^{-x^2}\,dx}_{<\infty,\ f \in M} + \beta^2 \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} g(x)^2 e^{-x^2}\,dx}_{<\infty,\ g \in M} < \infty.$$

$\therefore$ M är ett underrum.

LA 1.11

Bestäm de gemensamma punkterna till de tre affina mängder i $\mathbb{R}^4$ som bestäms av

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 - x_3 - 3x_4 &= 75, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 &= 50, \\ -4x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 4x_4 &= 25. \end{aligned}$$

Lösning Vi löser detta ekvationssystem genom Gausselimineringen:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -1 & -3 & 75 \\ 3 & 2 & 1 & 2 & 50 \\ -4 & 3 & 2 & -4 & 25 \end{array}\right] \boxed{-\tfrac{3}{2}}\ \boxed{+2} \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -1 & -3 & 75 \\ 0 & 1/2 & 5/2 & 13/2 & -125/2 \\ 0 & 5 & 0 & -10 & 175 \end{array}\right] \begin{array}{c} \\ \boxed{\times 2} \\ \boxed{\times 1/5} \end{array}$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -1 & -3 & 75 \\ 0 & 1 & 5 & 13 & -125 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & \cancel{175}\ 35 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -1 & -3 & 75 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & \cancel{175}\ 35 \\ 0 & 1 & 5 & 13 & -125 \end{array}\right] \boxed{-1} \sim \ldots$$

LANA 2016 Demo 1-8

LA1.11 (forts.)

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -1 & -3 & 75 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 35 \\ 0 & 0 & 5 & 15 & -160 \end{array}\right] \boxed{\times \tfrac{1}{5}} \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -1 & -3 & 75 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 35 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -32 \end{array}\right]$$

Parametrisera: $x_4 = t$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -1 & -3 & 75 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 35 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -32 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & t \end{array}\right] \boxed{-3}\ \boxed{+2}\ \boxed{+3} \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -1 & 0 & 75+3t \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 35+2t \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -32-3t \\ 0 & 0 & 0 & 1 & t \end{array}\right] \boxed{+1}$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 0 & 0 & 43 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 35+2t \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -32-3t \\ 0 & 0 & 0 & 1 & t \end{array}\right] \boxed{-1} \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & 0 & 0 & 8-2t \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 35+2t \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -32-3t \\ 0 & 0 & 0 & 0 & t \end{array}\right] \boxed{\times \tfrac{1}{2}}$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 4-t \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 35+2t \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -32-3t \\ 0 & 0 & 0 & 1 & t \end{array}\right]$$

$\therefore$ De gemensamma punkterna är

$$\{x \in \mathbb{R}^4 : \ x = (4, 35, -32, 0) + t(-1, 2, -3, 1), \ t \in \mathbb{R}\}.$$