LANA 2016 Demo 10 - 1

NA 5.27 Beräkna approximationer till egenvärdena till $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ genom fem iterationer vardera med potensmetoden och invers iteration från $x_0 := (1, 1)$.

Lösning Potensmetoden: Vi itererar $x_{k+1} = Ax_k$, vilket ger

$$\Lambda_k := \frac{x_k^T A x_k}{x_k^T x_k} \xrightarrow[k\to\infty]{} \lambda_{max}$$ (största egenvärde till A till belopp)

och $u_k := \frac{x_k}{\|x_k\|_2} \longrightarrow u_{max}$ (motsvarande egenvektor).

På detta sätt får vi $x_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $x_1 = Ax_0 = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}$, $x_2 = Ax_1 = \begin{bmatrix} 11 \\ 21 \end{bmatrix}$,

$x_3 = Ax_2 = \begin{bmatrix} 43 \\ 85 \end{bmatrix}$, $x_4 = Ax_3 = \begin{bmatrix} 171 \\ 341 \end{bmatrix}$, $x_5 = Ax_4 = \begin{bmatrix} 683 \\ 1365 \end{bmatrix}$

med $\Lambda_5 = \frac{x_5^T A x_5}{x_5^T x_5} \approx 4.0003$ (Exakt: $\lambda_{max} = 4$, $u_{max} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$).

Invers iteration: Vi använder potensmetoden på A^{-1} (i praktiken löser vi $Ax^{(k+1)} = x^{(k)}$, och beräknar inte A^{-1}). Detta ger $\Lambda_k \longrightarrow \frac{1}{\lambda_{min}}$ där λ_{min} är det till beloppet minsta egenvärdet till A (därmed är $\frac{1}{\lambda_{min}}$ det till beloppet största egenvärdet till A^{-1}). x_k går åter igen mot motsvarande egenvektor (om $Au = \lambda u$ och A är inverterbar så gäller $A^{-1}u = \frac{1}{\lambda}u$).

Vi får $x_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $x_1 = A^{-1}x_0 = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $x_2 = A^{-1}x_1 = \frac{1}{8}\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$,

$x_3 = A^{-1}x_2 = \frac{1}{32}\begin{bmatrix} 11 \\ -10 \end{bmatrix}$, $x_4 = A^{-1}x_3 = \frac{1}{128}\begin{bmatrix} 43 \\ -42 \end{bmatrix}$, $x_5 = A^{-1}x_4 = \frac{1}{512}\begin{bmatrix} 171 \\ -170 \end{bmatrix}$

med $(\Lambda_5)^{-1} \approx 0.9993$. (Exakt $\lambda_{min} = 1$, $u_{min} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$).

LANA 2016 Demo 10-2

NA 5.35 Visa med hjälp av spektralsatsen på A^TA att singulärvärdena till A är kvadratroten ur egenvärdena till A^TA.

Lösning Singulärvärden: Varje matris $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ kan faktoriseras som $A = U\Sigma V^T$ där $U \in \mathbb{R}^{m\times m}$, $V \in \mathbb{R}^{n\times n}$ är ortogonala och $\Sigma \in \mathbb{R}^{m\times n}$ är diagonal med singulärvärdena $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_{\min\{m,n\}} \geq 0$ (samt eventuellt extra nollor) på diagonalen.

A^TA är symmetrisk, så vi kan diagonalisera A^TA ortogonalt $A^TA = TDT^T$ där vi väljer egenvärdenas ordning så att $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n \geq 0$ (alla egenvärden är icke-negativa, se övning LA4.25, demo 8). Detta gör diagonaliseringen entydig upp till val av tecken för kolonnerna i T, vilka kancelleras mot motsvarande tecken i T^T.

Å andra sidan gäller också $A^TA = (U\Sigma V^T)^T(U\Sigma V^T)$
$= V\Sigma^T \underbrace{U^TU}_{=I}\Sigma V^T = V\Sigma^T\Sigma V^T$ där $\Sigma^T\Sigma$ har diagonal med $\sigma_1^2 \geq \dots \geq \sigma_{\min\{m,n\}}^2$ (samt eventuellt extra nollor) på diagonalen. Detta är alltså också en ortogonal diagonalisering i samma ordning som TDT^T, så $D = \Sigma^T\Sigma$ och därmed

$$\sigma_k^2 = \lambda_k \Rightarrow \sigma_k = \sqrt{\lambda_k}, \quad k = 1, \dots, \min\{m,n\}.$$

LANA 2016 Demo 10-3

NA 5.37 (a) Bestäm Moore–Penrose-pseudoinvers till $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Lösning Pseudoinvers: Om $A = U\Sigma V^T$ är singulärvärdesuppdelning (SVD) av A och $\Sigma = \begin{bmatrix} \Sigma_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ där Σ_r innehåller alla r singulärvärden > 0 kan vi bilda kompakt SVD

$$A = U\Sigma V^T = [U_r \;\; U'] \begin{bmatrix} \Sigma_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} [V_r \;\; V']^T = U_r \Sigma_r V_r^T,$$

där U_r och V_r består av de första r kolonnerna i U resp. V.

Pseudoinversen definieras som $A^+ := V_r \Sigma_r^{-1} U_r^T$ (vilket är identiskt med A^{-1} om A är inverterbar, alltså $r = n$ om $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$).

Här gäller $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{U} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\Sigma} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^T}_{V} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{U_r} \cdot \underbrace{1}_{\Sigma_r} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}^T}_{V_r}$

så $A^+ = V_r \Sigma_r U_r^T = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot 1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} (= A.)$

(b) Bestäm pseudoinvers till $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \varepsilon \end{bmatrix}$ där $0 < \varepsilon \ll 1$.

Lösning Denna matris är inverterbar, så $A^+ = A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \varepsilon^{-1} \end{bmatrix}$.

(c) Dra slutsats angående konditionstalet för pseudoinversion utifrån ovanstående.

Lösning Konditionstal $= \dfrac{|\text{relativt fel i utdata } (A^+)|}{|\text{relativt fel i indata } (A)|} =$

$$\overset{\text{i exemplen ovan}}{=} \frac{\varepsilon^{-1}}{\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon^2} \gg 1$$

alltså mycket illakonditionerat.

LANA 2016 Demo 10-4

NA5.39 Låt $A(\alpha) := \begin{bmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ 4 & 2 & 0 \\ 6 & 5 & 3 \end{bmatrix}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

(a) Kan α väljas så att alla egenvärden till $A(\alpha)$ är reella?

Lösning. Ja! Ta $\alpha = 0$ så är $A(\alpha)$ triangulär med egenvärden 1, 2, 3.

(b) Kan α väljas så att alla egenvärden har nollskild imaginärdel?

Lösning Nej! Det karakteristiska polynomet är av grad 3 med reella koefficienter och har som sådant minst en reell rot, då komplexa rötter förekommer i konjugatpar.

NA5.40 (a) Låt A vara symmetrisk med egenvärden $\mu \neq \lambda$ och motsvarande egenvektorer y respektive x. Visa att x och y är ortogonala.

Lösning Vi visar att $x^T y = 0$:

$$0 = y^T A x - y^T A x = (A^T y)^T x - y^T (Ax) = (Ay)^T x - y^T (Ax)$$
$$= (\mu y)^T x - y^T (\lambda x) = (\mu - \lambda) y^T x \implies y^T x = 0$$

eftersom $\mu - \lambda \neq 0$.

(b) Antag att A inte är symmetrisk och att y istället är en vänsteregenvektor svarande mot egenvärdet μ, alltså $y^T A = \mu y^T$. Visa att x och y är ortogonala även i detta fall.

Lösning Vi kan använda samma metod som i (a). Nu med färre mellanled:

$$0 = y^T A x - y^T A x = (y^T A) x - y^T (Ax) = \mu y^T x - \lambda y^T x$$
$$= (\mu - \lambda) y^T x \implies y^T x = 0.$$