LANA 2016 Demo 12 - 1

NA 2.8 (a) Visa att om $f(x)$ har en dubbelrot x^* som approximeras av $\hat{x}$ så gäller följande tumregelsuppskattning

$$|\hat{x} - x^*|^2 \lesssim 2\left|\frac{f(\hat{x})}{f''(\hat{x})}\right|.$$

Lösning Att x^* är en dubbelrot innebär att $f(x^*) = f'(x^*) = 0$, så enligt Taylors formel gäller $f(\hat{x}) = \underbrace{f(x^*)}_{=0} + \underbrace{f'(x^*)}_{=0}(\hat{x} - x^*) + \frac{1}{2}f''(y)(\hat{x} - x^*)^2$, för något y mellan x^* och $\hat{x}$. Alltså

$$f(\hat{x}) = \frac{1}{2}f''(y)(\hat{x} - x^*)^2 \Rightarrow |\hat{x} - x^*|^2 = 2\left|\frac{f(\hat{x})}{f''(y)}\right|$$

och tumregeln följer (med $\approx$ snarare än $\lesssim$) om vi approximerar $f''(y) \approx f''(\hat{x})$.

Not: Om $f''(y) = f''(\hat{x})$, till exempel om $f''(x)$ är konstant, gäller naturligtvis feluppskattningen exakt. Detta är fallet i deluppgift (b), men ej i (c). Man kan konstruera exempel där uppskattningen blir i princip hur dålig som helst, till exempel $f(x) = x^2 e^{-\alpha x}$ där α kan väljas så stort som man behagar.

NA 2.10 Visa att Newtons metod konvergerar linjärt med asymptotisk felkonstant $C = \frac{1}{2}$ vid dubbelrot.

Lösning. Vi ska visa att om $f(x)$ är tillräckligt kontinuerlig och deriverbar och har en dubbelrot x^* (alltså $f(x^*) = f'(x^*) = 0$) så gäller att $|x_{k+1} - x^*| \leq \frac{1}{2}|x_k - x^*|$ asymptotiskt då $k \to \infty$ om x_{k+1} beräknas enligt Newtons metod $x_{k+1} = x_k - \dfrac{f(x_k)}{f'(x_k)}$, $k = 0, 1, \ldots$, om x_0 väljs så att $x_k \xrightarrow[k\to\infty]{} x^*$ (alltså tillräckligt nära).

Från kursbokens ekvation 2.11 får vi

$$|x_{k+1} - x^*| \leq \left| \frac{f''(\xi_k)}{2f'(x_k)} \right| |x_k - x^*|^2$$

för något ξ_k mellan x_k och x^*. Detta ser ut som kvadratisk konvergens (potensen av $|x_k - x^*|$ är 2), men $f'(x_k) \longrightarrow 0$ då $k \to \infty$ vilket gör konvergensen långsammare. Taylors formel ger $f'(x_k) = \underbrace{f'(x^*)}_{=0} + f''(\eta_k)(x_k - x^*)$ för något η_k mellan x_k och x^*. Så

$$|x_k - x^*| \leq \left| \frac{f''(\xi_k)}{2f''(\eta_k)(x_k - x^*)} \right| |x_k - x^*|^2 = \left| \frac{f''(\xi_k)}{2f''(\eta_k)} \right| |x_k - x^*|$$

och konstanten $\left| \dfrac{f''(\xi_k)}{2f''(\eta_k)} \right| \longrightarrow \frac{1}{2}$ då $k \longrightarrow \infty$ då $f''(\xi_k), f''(\eta_k) \to f''(x^*)$ och $f''(x^*) \neq 0$.

LANA 2016 Demo 12 - 3

NA 2.9 (a) (Generaliserad) Visa att den modifierade Newtonmetoden $x_{k+1} = x_k - m\dfrac{f(x_k)}{f'(x_k)}$ ger kvadratisk konvergens vid rot x^* med multiplicitet m (alltså $f(x^*) = \dots = f^{(m-1)}(x^*) = 0$).

Lösning Vi ska alltså visa $|x_{k+1} - x^*| \le C_k |x_k - x^*|^2$, där C_k inte beror på $|x_k - x^*|$. Vi subtraherar x^* ledvis i iterationsformeln:

$$x_{k+1} - x^* = x_k - x^* - m\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}.$$

Taylors formel:

$$f(x_k) = \underbrace{f(x^*) + \dots + \frac{1}{(m-1)!}f^{(m-1)}(x^*)(x_k - x^*)^{m-1}}_{=0} + \frac{1}{m!}f^{(m)}(\xi_k)(x_k - x^*)^m,$$

$$f'(x_k) = \underbrace{f'(x^*) + \dots + \frac{1}{(m-2)!}f^{(m-1)}(x^*)(x_k - x^*)^{m-2}}_{=0} + \frac{1}{(m-1)!}f^{(m)}(\eta_k)(x_k - x^*)^{m-1},$$

där ξ_k och η_k ligger mellan x_k och x^*. Vi får

$$x_{k+1} - x^* = x_k - x^* - m\frac{\frac{1}{m!}f^{(m)}(\xi_k)(x_k - x^*)^m}{\frac{1}{(m-1)!}f^{(m)}(\eta_k)(x_k - x^*)^{m-1}}$$

$$= x_k - x^* - \underbrace{\frac{(m-1)!\,m}{m!}}_{=1}\frac{f^{(m)}(\xi_k)}{f^{(m)}(\eta_k)}(x_k - x^*)$$

Taylors formel igen: $f^{(m)}(\xi_k) = f^{(m)}(\eta_k) + f^{(m+1)}(\zeta_k)(\xi_k - \eta_k)$ för något ζ_k mellan ξ_k och η_k. Vi får

$$x_{k+1} - x^* = x_k - x^* - \frac{f^{(m)}(\eta_k) + f^{(m+1)}(\zeta_k)(\xi_k - \eta_k)}{f^{(m)}(\eta_k)}(x_k - x^*)$$

$$= -\frac{f^{(m+1)}(\zeta_k)}{f^{(m)}(\eta_k)}(\xi_k - \eta_k)(x_k - x^*)$$

$$\Rightarrow |x_{k+1} - x^*| = \left|\frac{f^{(m+1)}(\zeta_k)}{f^{(m)}(\eta_k)}\right||\xi_k - \eta_k||x_k - x^*| \le \left|\frac{f^{(m+1)}(\zeta_k)}{f^{(m)}(\eta_k)}\right||x_k - x^*|^2$$

eftersom ξ_k och η_k ligger mellan x_k och x^*.

(b) Testa ~~på~~ den modifierade metoden på $f(x) = x^3 - 7.5x^2 + 18x - 14$. Jämför med vanliga Newtons metod. Starta i $x_0 = 1$. f har dubbelrot $x^* = 2$.

Lösning Se separat Matlabkod.

LANA 2016 Demo 12-4

NA2.13 Vi vill beräkna $\sqrt{3}$ genom att lösa $x^2-3=0$ med fixpunktsiteration $x_{k+1}=g(x_k)$ med lämpligt g. Avgör om metoden är konvergent i följande fall:

(a) $g(x) = 3+x-x^2$.

Lösning Man kan visa att metoden är lokalt konvergent om $|g'(\sqrt{3})|<1$. Här har vi $g'(x) = 1-2x$ med $|g'(\sqrt{3})| = |1-2\sqrt{3}| > 1$, så vi kan inte garantera lokal konvergens. (Konvergerar i själva verket inte om inte $x_0=\sqrt{3}$.)

(b) $g(x) = 1+x-\frac{x^2}{3}$.

Lösning $g'(x) = 1-\frac{2x}{3}$ med $|g'(\sqrt{3})| = \left|1-\frac{2\sqrt{3}}{3}\right| < 1$, alltså är metoden lokalt konvergent.

(c) Det g som motsvarar Newtons metod.

Lösning Vi löser $f(x)=x^2-3=0$ så $g(x) = x-\frac{f(x)}{f'(x)}$
$$= x - \frac{x^2-3}{2x} = x-\frac{x}{2}+\frac{3}{2x} = \frac{x}{2}+\frac{3}{2x}$$
med $g'(x) = \frac{1}{2}-\frac{3}{2x^2}$ och $|g'(\sqrt{3})| = 0$, så lokal konvergens gäller.

Not: I allmänhet gäller för Newtons metod på $f(x)=0$ att
$$g(x) = x-\frac{f(x)}{f'(x)}, \quad g'(x) = 1-\frac{f'(x)}{f'(x)}+\frac{f(x)}{f'(x)^2} = \frac{f(x)}{f'(x)^2},$$
så $|g'(x^*)| = \left|\frac{f(x^*)}{f'(x^*)^2}\right| = 0$ om x^* är en enkelrot, så $f(x^*)=0$ men $f'(x^*)\neq 0$. Därmed kan vi konstatera att Newtons metod är lokalt konvergent för enkelrötter.

NA2.15 Lös $f(x) := 2-x-e^x$ med hybridmetod: Fas I intervallhalvering på $[-2, 2]$, Fas II: Newtons metod.

LANA 2016 Demo 12-5

NA 2.18 Betrakta systemet $f(x) = \begin{bmatrix} x_1 - 1 \\ x_1 x_2 - 1 \end{bmatrix} = 0.$

(a) För vilka $x^{(0)}$ misslyckas Newtons metod för detta system?

Lösning För system lyder Newtons metod:

Bestäm $x^{(k+1)}$ så att $J_f(x^{(k)})(x^{(k+1)} - x^{(k)}) = -f(x^{(k)})$

eller (matematiskt men ej numeriskt ekvivalent)

$x^{(k+1)} = x^{(k)} - J_f(x^{(k)})^{-1} f(x^{(k)})$, där $J_f(x) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)\right)$

är Jacobianen till f.

Metoden misslyckas alltså om $J_f(x^{(0)})$ inte är inverterbar,

alltså om $\det J_f(x^{(0)}) = 0$.

Här har vi $J_f(x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ x_2 & x_1 \end{bmatrix}$ med $\det J_f(x) = x_1$

så metoden misslyckas om $x_1^{(0)} = 0$.

(b) Visa att Newtons metod konvergerar i som mest två iterationer annars.

Lösning Vi utför iterationerna. Låt $x_1^{(0)} \neq 0$. Vi får

$$x^{(1)} = x^{(0)} - J_f(x^{(0)})^{-1} f(x^{(0)}) = \begin{bmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \end{bmatrix} - \frac{1}{x_1^{(0)}} \begin{bmatrix} x_1^{(0)} & 0 \\ -x_2^{(0)} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^{(0)} - 1 \\ x_1^{(0)} x_2^{(0)} - 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{x_2^{(0)} - 1}{x_1^{(0)}} \end{bmatrix}.$$

Antingen är $\frac{x_2^{(0)} - 1}{x_1^{(0)}} = 1$, då är systemet löst, eller så gör vi en iteration till:

$$x^{(2)} = x^{(1)} - J_f(x^{(1)})^{-1} f(x^{(1)}) = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{x_2^{(0)} - 1}{x_1^{(0)}} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{x_2^{(0)} - 1}{x_1^{(0)}} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 - 1 \\ 1 \cdot \frac{x_2^{(0)} - 1}{x_1^{(0)}} - 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{x_2^{(0)} - 1}{x_1^{(0)}} - \left(\frac{x_2^{(0)} - 1}{x_1^{(0)}} - 1 \right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$ Nu är systemet löst!