LANA 2016 Demo 13-1

NA 3.1 Bestäm interpolationspolynomet på Newtons form till $(-1, 1)$, $(0, 0)$, $(1, 1)$.

Lösning Newtons form för interpolation av (x_i, y_i), $i = 1, \dots, n$, är

$$p_n(x) = c_0 + c_1(x - x_1) + \dots + c_{n-1}(x - x_1)\cdots(x - x_{n-1})$$
$$= c_0 + \sum_{i=1}^{n-1} c_i \prod_{j=1}^{i} (x - x_j),$$ vilket ger ett triangulärt ekvationssystem

för $c_0, \dots, c_{n-1}$. Här: $p_2(x) = c_0 + c_1(x+1) + c_2(x+1)x$.

$p_2(-1) = 1 \implies c_0 + 0c_1 + 0c_2 = 1 \implies c_0 = 1.$

$p_2(0) = 0 \implies c_0 + c_1 + 0c_2 = 0 \implies c_1 = -c_0 = -1.$

$p_2(1) = 1 \implies c_0 + 2c_1 + 2c_2 = 1 \implies c_2 = \dfrac{1 - 2c_1 - c_0}{2} = 1.$

$\therefore\ p_2(x) = 1 - (x+1) + (x+1)x.$

NA 3.9 Kan man i allmänhet anpassa en kvadratisk spline till n datapunkter så att...

(a)... splinen är kontinuerligt deriverbar?

Lösning Den kvadratiska splinen s kan skrivas $s(x) = s_i(x) = a_i x^2 + b_i x + c_i$ för $x \in [x_i, x_{i+1}]$, $i = 1, \dots, n-1$. (Vi antar att punkterna är ordnade så att $x_1 < x_2 < \dots < x_n$.) Vi har alltså $3(n-1)$ frihetsgrader (a_i, b_i, c_i för $i = 1, \dots, n-1$). Följande kriterier ska uppfyllas:

Interpolation — $s(x_i) = y_i$, $i = 1, \dots, n$.
Kontinuitet — $s_i(x_i) = s_{i+1}(x_i)$, $i = 1, \dots, n-2$.
Kontinuerlig derivata — $s_i'(x_i) = s_{i+1}'(x_i)$, $i = 1, \dots, n-2$.

Totalt $n + (n-2) + (n-2) = 3(n-1) - 1$ ekvationer, så systemet är underbestämt, alltså lösbart.

(b)... splinen är två gånger kontinuerligt deriverbar?

Lösning Vi lägger till kriteriet $s_i''(x) = s_{i+1}''(x)$, $i = 1, \dots, n-2$. Nu har vi totalt $4(n-1) - 2$ ekvationer. Eftersom $4(n-1) - 2 > 3(n-1)$ då $n > 3$ är systemet inte lösbart i allmänhet. Dock är $4(n-1) - 2 \leq 3(n-1)$ då $n \leq 3$ och därmed kan vi lösa systemet för $n \leq 3$. Detta är väntat eftersom tre eller färre punkter kan interpoleras med ett enda andragradspolynom.

LANA 2016 Demo 13-2

NA 3.13 Låt $f(x) = x^2 - x$, och $x_0 = 0,\ x_1 = 1,\ x_2 = 2.$

(a) Bestäm den linjära spline som interpolerar f i punkterna.

Lösning

$$s(x) = \begin{cases} s_1(x) = a_1 x + b_1, & 0 \le x \le 1, \\ s_2(x) = a_2 x + b_2, & 1 \le x \le 2. \end{cases}$$

$$\begin{cases} s_1(0) = f(0) = 0, \\ s_1(1) = f(1) = 0, \end{cases} \implies s_1(x) \equiv 0.$$

$$\begin{cases} s_2(1) = f(1) = 0, \\ s_2(2) = f(2) = 3, \end{cases} \implies s_2(x) = 3x - 3.$$

(b) Bestäm den kvadratiska spline som interpolerar f i punkterna och uppfyller $s'(0) = 0$.

Lösning

$$s(x) = \begin{cases} s_1(x) = a_1 x^2 + b_1 x + c_1, & 0 \le x \le 1, \\ s_2(x) = a_2 x^2 + b_2 x + c_2, & 1 \le x \le 2. \end{cases}$$

$$\begin{cases} s_1'(0) = 0, \\ s_1(0) = f(0) = 0, \\ s_1(1) = f(1) = 0, \end{cases} \implies s_1(x) \equiv 0.$$

$$\begin{cases} s_2'(1) = s_1'(1) = 0, \\ s_2(1) = f(1) = 0, \\ s_2(2) = f(2) = 2, \end{cases} \implies s_2(x) = 2x^2 - 4x + 2.$$

NA 4.1 Approximera $\int_0^1 x^3\,dx$ med trapetsregeln och Simpsons regel. Uppskatta trunkeringsfelet för approximationerna.

Lösning Trapetsregeln: $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)\frac{f(b)+f(a)}{2} + R_T$

med $\displaystyle |R_T| \le \frac{(b-a)^3}{12} \max_{x\in[a,b]} |f''(x)|.$

Här $\displaystyle\int_0^1 x^3\,dx = (1-0)\frac{1^3+0^3}{2} + R_T = \frac{1}{2} + R_T$, med

$\displaystyle |R_T| \le \frac{(1-0)^3}{12} \max_{x\in[0,1]} |6x| = \frac{1}{2}$ (Exakt fel är $\frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$.)

Simpsons regel: $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)\frac{f(a) + f(\frac{b+a}{2}) + f(b)}{6} + R_T$,

med $\displaystyle |R_T| \le \frac{(b-a)^5}{2880} \max_{x\in[a,b]} |f^{(4)}(x)|.$

Här $\displaystyle\int_0^1 x^3\,dx = (1-0)\frac{0^3 + 4(\frac{1}{2})^3 + 1^3}{6} + R_T = \frac{1}{4} + R_T$,

$\displaystyle |R_T| \le \frac{(1-0)^5}{2880} \max_{x\in[0,1]} |0| = 0.$

LANA 2016 Demo 13-3

NA 4.3 Anta att $\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=1}^{n} w_i f(x_i)$ är en kvadraturformel som bygger på polynominterpolation av f. Visa att $\sum_{i=1}^{n} w_i = b-a$.

Lösning Vi noterar att $\sum_{i=1}^{n} w_i = \sum_{i=1}^{n} w_i \cdot 1 = \sum_{i=1}^{n} w_i p(x_i)$

där $p(x) \equiv 1$ är interpolationspolynomet till $f(x) \equiv 1$. Alltså

$$\sum_{i=1}^{n} w_i = \sum_{i=1}^{n} w_i p(x_i) = \int_a^b p(x)dx = \int_a^b f(x)dx = \int_a^b 1dx = b-a.$$

NA 4.6 Utifrån tabellvärden (se uppgiftstexten) över en rakets acceleration som funktion av tiden efter uppskjutning, approximera raketens höjd över uppskjutningspunkten vid den sista tidpunkten.

Lösning Beteckna tidpunkter och accelerationer med t_i, a_i, $i=0,\dots,k$. Vi approximerar integraler med trapetsformeln och får:

Hastighet $v(t_i) \approx \sum_{j=0}^{i-1} \frac{t_{j+1}-t_j}{2}(a_{j+1}+a_j)$,

Höjd $h(t_k) \approx \sum_{j=0}^{k-1} \frac{t_{j+1}-t_j}{2}(v_{j+1}+v_j)$

$$= \sum_{j=0}^{k-1} \frac{t_{j+1}-t_j}{2}\left(\sum_{i=0}^{j} \frac{t_{i+1}-t_i}{2}(a_{i+1}+a_i) + \sum_{i=0}^{j-1} \frac{t_{i+1}-t_i}{2}(a_{i+1}+a_i)\right)$$

$$= \sum_{j=0}^{k-1} \frac{t_{j+1}-t_j}{2}\left(\sum_{i=0}^{j-1} (t_{i+1}-t_i)(a_{i+1}+a_i) + \frac{t_{j+1}-t_j}{2}(a_{j+1}+a_j)\right)$$

Insättning av tabellvärden ger $v(t_k) \approx 2153$ m/s, $h(t_k) \approx 60750$ m.

NA4.9 En integral beräknas med trapetsregeln med steglängd $h=0.2$ och ett uppskattat fel 10^{-3}. Vilken steglängd bör användas om man önskar få ett fel av storleksordning 10^{-5} ?

Lösning För trapetsformeln gäller $|R_T| \leq \frac{b-a}{12} h^2 \max_{x\in[a,b]} |f''(x)|$, vilket leder till att vi bör anta att felet $\epsilon(h) = Ch^2$.

Vi har $\epsilon(0.2) = 10^{-3} \Longrightarrow C = \frac{10^{-3}}{0.2^2} = 0.025$.

För att hitta den önskade steglängden löser vi $\epsilon(h) = 10^{-5}$

$$\Longrightarrow 0.025h^2 = 10^{-5} \Longrightarrow h = 0.02.$$

(Ett snabbare sätt: Vi vet att felet beror kvadratiskt på steglängden. För att minska felet med en faktor 100 (från 10^{-3} till 10^{-5}) ska vi alltså minska steglängden med en faktor 10 (från 0.2 till 0.02).)