LANA 2016 Demo 14-1

NA 6.1 Visa att trunkeringsfelet för approximationen $f'(x) \approx \dfrac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}$ är proportionellt mot h^2.

Lösning Vi använder Taylors formel: $f(x\pm h) = f(x) \pm f'(x)h + \dfrac{f''(x)}{2}h^2 \pm \dfrac{f^{(3)}(\xi_\pm)}{6}h^3$ där $\xi_\pm$ ligger mellan x och $x\pm h$. Vi får

$$
\begin{aligned}
f(x+h)-f(x-h) &= f(x)+f'(x)h+\frac{f''(x)}{2}h^2+\frac{f^{(3)}(\xi_+)}{6}h^3 \\
&\quad -\left(f(x)-f'(x)h+\frac{f''(x)}{2}h^2-\frac{f^{(3)}(\xi_-)}{6}h^3\right) \\
&= 2h\,f'(x)+\frac{f^{(3)}(\xi_+)+f^{(3)}(\xi_-)}{6}h^3
\end{aligned}
$$

och därmed

$$
\begin{aligned}
\left|f'(x)-\frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}\right| &= \left|\frac{f^{(3)}(\xi_+)+f^{(3)}(\xi_-)}{12}h^2\right| \\
&\le \frac{h^2}{6}\max_{y\in[x-h,\,x+h]}\left|f^{(3)}(y)\right|.
\end{aligned}
$$

NA 6.4 Använd Taylorutveckling för att bestämma en approximationsformel för $f'(x)$ baserad på $f(x)$, $f(x+h)$, och $f(x+2h)$, sådan att felet är proportionellt mot h^2.

Lösning Vi extrapolerar från framåtdifferens med steglängd nh, $n=1,2$.

Taylorutveckling ger $f(x+nh) = f(x)+nf'(x)h+\dfrac{n^2}{2}f''(x)h^2+\mathcal{O}(h^3)$

så $\dfrac{f(x+nh)-f(x)}{nh} = f'(x)-\dfrac{n}{2}f''(x)h+\mathcal{O}(h^2)$, alltså

$$(1)\quad f'(x) = \frac{f(x+h)-f(x)}{h}+\frac{1}{2}f''(x)h+\mathcal{O}(h^2),$$

$$(2)\quad f'(x) = \frac{f(x+2h)-f(x)}{2h}+f''(x)h+\mathcal{O}(h^2).$$

Multiplicera (1) med 2, och subtrahera (2):

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= 2\,\frac{f(x+h)-f(x)}{h}-\frac{f(x+2h)-f(x)}{2h}+f''(x)h-f''(x)h+\mathcal{O}(h^2) \\
&= \underbrace{\frac{4f(x+h)-f(x+2h)-3f(x)}{2h}}_{\text{Vår sökta approximation}}+\mathcal{O}(h^2)
\end{aligned}
$$

LANA 2016 Demo 14-2

NA6.6 Givet tabellvärden (se kursbok) över entalpi H för vatten, som funktion av temperatur T, vid nio olika temperaturer $T_1, \dots, T_9$ med likformig fördelning, $T_{i+1} - T_i = \delta T$, approximera värmekapaciteten $C_p(T) = H'(T)$ vid $T = T_5$ genom Richardsonextrapolation. Uppskatta felet.

Lösning Beteckna $H(T_i)$ med H_i. Vi baserar beräkningen på central differenskvot:

$$(1) \qquad H'(T_i) = \frac{H_{i+1} - H_{i-1}}{2\delta T} + \alpha\,\delta T^2 + O(\delta T^3)$$

$$(2) \qquad H'(T_i) = \frac{H_{i+2} - H_{i-2}}{4\delta T} + 4\alpha\,\delta T^2 + O(\delta T^3)$$

(felutvecklingen följer från problem NA4.1). Extrapolationen: vi multiplicerar (1) med 4, och subtraherar (2):

$$3H'(T_i) = 4\,\frac{H_{i+1} - H_{i-1}}{2\delta T} - \frac{H_{i+2} - H_{i-2}}{4\delta T} + O(\delta T^3)$$

$$\Rightarrow H'(T_i) = \underbrace{\frac{-H_{i+2} + 8H_{i+1} - 8H_{i-1} + H_{i-2}}{12\,\delta T}}_{\substack{\text{Detta blir vår approximationsformel.} \\ \text{Vi betecknar den med } D_{\delta T}H(T_i).}} + O(\delta T^3)$$

Vi får $D_{\delta T}H(T_5) \approx 4.1818$ J/K.

Felet kan uppskattas enligt tumregeln

$$|H'(T_i) - D_{\delta T}H(T_i)| \lesssim |D_{\delta T}H(T_i) - D_{2\delta T}H(T_i)|$$

där alltså $D_{2\delta T}H(T_i) = \dfrac{-H_{i+4} + 8H_{i+2} - 8H_{i+2} + H_{i-4}}{24\,\delta T}$, Vi får

$$|D_{\delta T}H(T_5) - D_{2\delta T}H(T_5)| \approx 1.7083 \cdot 10^{-4}.$$

LANA 2016 Demo 14-3

NA 6.7 Skriv om differentialekvationerna till förstaordningssystem.

(a) $y^{(3)}(t) = y''(t) + ty(t)$.

Lösning Ansätt $x_1(t) = y(t)$, $x_2(t) = y'(t)$, $x_3(t) = y''(t)$. Vi får

$$x_1'(t) = x_2(t), \quad \text{(per konstruktion)}$$
$$x_2'(t) = x_3(t), \quad \text{(— " —)}$$
$$x_3'(t) = x_3(t) + tx_1(t). \quad \text{(enligt differentialekvationen)}$$

(b) $y^{(3)}(t) = \sin(y'(t)) + \cos(t)y(t)y'(t)$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = 1$.

Lösning Med samma ansats som ovan får vi

$$x_1'(t) = x_2(t),$$
$$x_2'(t) = x_3(t),$$
$$x_3'(t) = \sin(x_2(t)) + \cos(t)x_1(t)x_2(t),$$
$$x(0) = (1, 0, 1).$$

NA 6.8 Är systemet $y'(t) = Ay(t)$, $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$, stabilt?

Lösning A kan diagonaliseras som $A = TDT^{-1}$ med $D = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$ (egenvärdena till A är alltså -1 resp. -2). Vi får alltså

$$y'(t) = TDT^{-1}y(t) \iff T^{-1}y'(t) = D(T^{-1}y(t))$$

så med koordinatbytet $x(t) := T^{-1}y(t)$ är systemet $x'(t) = Dx(t)$ diagonalt: $x_1'(t) = -x_1(t)$, $x_2'(t) = -2x_2(t)$. Lösningarna till dessa system ($x_1(t) = C_1e^{-t}$, $x_2(t) = C_2e^{-2t}$) är icke-växande, därmed är systemet stabilt.

I allmänhet är ett linjärt system $y'(t) = Ay(t)$, ~~stabilt~~ med A diagonaliserbar, stabilt om alla egenvärden till A är icke-positiva.

LANA 2016 Demo 14-4

NA 6.10 Bestäm approximationsordning och stabilitetsvillkor för Heuns metod.

Lösning Heuns metod för $y'(t) = f(t, y)$, med steglängd h är

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2}\left(f(t_k, y_k) + f(t_k+h, y_k + hf(t_k, y_k))\right).$$

För att analysera approximation och stabilitet applicerar vi metoden på referensproblemet $y'(t) = \lambda y(t)$. (Detta fungerar för linjära diagonaliserbara problem, mer generell analys är möjlig, men ingår inte i denna kurs.)

För referensproblemet får vi

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2}(\lambda y_k + \lambda(y_k + h\lambda y_k)) = \left(1 + h\lambda + \frac{(h\lambda)^2}{2}\right)y_k,$$

vilket ger tillväxtfaktorn $1 + h\lambda + \frac{(h\lambda)^2}{2}$.

Approximationsordning fås genom att jämföra med den exakta tillväxtfaktorn $e^{h\lambda}$ $(y(t+h) = e^{h\lambda}y(t))$.

$$1 + h\lambda + \frac{(h\lambda)^2}{2} - e^{h\lambda} = \{\text{Taylorutveckla } e^{h\lambda}\}$$
$$= 1 + h\lambda + \frac{(h\lambda)^2}{2} - \left(1 + h\lambda + \frac{(h\lambda)^2}{2} + \frac{(h\lambda)^3}{6} + \dots\right)$$
$$= -\frac{(h\lambda)^3}{6} + \dots$$

vilket motsvarar approximationsordning $3 - 1 = 2$ (felet ökar i värsta fall med $\mathcal{O}(h^3)$ per steg, men vi tar $\mathcal{O}(h^{-1})$ stycken steg, så det totala felet blir $\mathcal{O}(h^3)\mathcal{O}(h^{-1}) = \mathcal{O}(h^2)$).

Metoden är stabil när tillväxtfaktorn är till belopp mindre än 1, alltså $\left|1 + h\lambda + \frac{(h\lambda)^2}{2}\right| \leq 1$.