LANA 2016 Demo 15-1

NA6.12 Betrakta begynnelsevärdesproblemet

$$y''(t) = y(t), \quad t > 0,$$
$$y(0) = 1,$$
$$y'(0) = 2.$$

(a) Skriv ~~pro~~problemet som ett förstaordningssystem.

Lösning Ansätt $x_1(t) := y(t)$, $x_2(t) = y'(t)$. Vi får

$$\begin{cases} x_1'(t) = x_2(t), & x_1(0) = 1, \\ x_2'(t) = x_1(t), & x_2(0) = 2. \end{cases}$$

Alltså $x'(t) = Ax(t)$, $x(0) = x_0$, med $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $x_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

(b) Är systemet stabilt?

Lösning Egenvärdena till A är -1 och 1, alltså är systemet inte stabilt (åtminstone ett positivt egenvärde).

(c) Ta ett steg med Eulers framåtmetod med $h = 0.5$.

Lösning Euler framåt: $x(h) \approx x^{(1)} = x^{(0)} + hx'(0) = x_0 + 0.5Ax_0 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2.5 \end{bmatrix}$.

(d) Är Eulers framåtmetod med $h=0.5$ stabil?

Lösning Nej, approximationerna växer: $\|x_0\| < \|x^{(1)}\|$.

Alternativt: Stabilitetskriterie för Euler framåt är $|1+h\lambda| \leq 1$, men vi har $|1+h\lambda| > 1$ för $h=0.5$, $\lambda=1$.

(e) Är Eulers bakåtmetod stabil med $h=0.5$?

Lösning Stabilitetskriteriet för Euler bakåt är $\left|\frac{1}{1-h\lambda}\right| \leq 1$, men vi har $\left|\frac{1}{1-h\lambda}\right| = 2 > 1$ för $h=0.5$, $\lambda=1$, så inte heller Euler bakåt är stabil.

LANA 2016 Demo 15-2

NA 6.13 (Aningen omformulerad) Betrakta problemet $y'(t) = -y(t)^2$, $t>0$, $y(0)=1$. Approximera lösningen $y(0.1)$ med hjälp av Eulers bakåtmetod med $h=0.1$. Använd fixpunktsiteration respektive Newtons metod för att lösa det icke-linjära ekvationssystemet. Bestäm startapproximation med Euler framåt.

Lösning Euler bakåt: $y(h) \approx y_1 = y_0 + hf(h, y_1) = 1 - 0.1y_1^2$

$\iff g(y_1) := 0.1y_1^2 + y_1 - 1 = 0.$

Startapproximation med Euler framåt (ekvivalent med att starta i $y_1^{(0)} = y_0$ för fixpunktsiteration):

$$y_1^{(0)} = y_0 + hf(0, y_0) = 1 - 0.1\cdot 1^2 = 0.9.$$

Fixpunktsiteration $y_1^{(k+1)} = y_0 - h(y_1^{(k)})^2 = 1 - 0.1(y_1^{(k)})^2$.

Newtons metod $$y_1^{(k+1)} = y_1^{(k)} - \frac{g(y_1^{(k)})}{g'(y_1^{(k)})} = y_1^{(k)} - \frac{0.1(y_1^{(k)})^2 + y_1^{(k)} - 1}{0.2y_1^{(k)} + 1}$$

Resultat:

k	0	1	2	3
$y_1^{(k)}$ Fixpunkt	0.9	0.919	0.916	0.916
$y_1^{(k)}$ Newton	0.9	0.916	0.916	0.916

Exakt

$y(t) = \frac{1}{t+1}$

$y(0.1) = \frac{1}{1.1} \approx 0.909$

NA 6.15 Betrakta systemet $y'(t) = Ay(t)$, $A = \begin{bmatrix} -10^0 & 1 & 2 \\ 2 & -10^2 & -1 \\ -1 & 3 & -10^4 \end{bmatrix}$.

Hur liten steglängd h krävs för att Euler framåt ska vara stabil?

Lösning Tack vare de stora elementen på diagonalen kan vi approximera egenvärdena till A som $\approx -1, -10^2, -10^4$.

Stabilitetskriteriet för Euler framåt är $|1+h\lambda| \leq 1 \Rightarrow |1-h\cdot 10^k| \leq 1$, $k=0,2,4$.

Det begränsande fallet är $k=4$, då $|1-h\cdot 10^k| \leq 1 \Rightarrow h\cdot 10^k \leq 2$

$\Rightarrow h \leq 2\cdot 10^{-k} = 2\cdot 10^{-4}$.

LANA 2016 Demo 15-3

NA 6.24 Behandla randvärdesproblemet $y''(t) - y(t)^3 = t$, $a < t < b$, $y(a) = c_1$, $y(b) = c_2$.

(a) Skriv problemet på lämplig form för inskjutning.

Lösning Denna form är som första ordnings begynnelsevärdesproblem där begynnelsevillkoret, och därmed lösningen, beror på en parameter s som ska bestämmas så att villkoret i $t=b$ uppfylls.

Sätt alltså $x_1(t,s) = y(t)$, $x_2(t,s) = y'(t)$. Vi får systemet
$x'(t,s) = f(t, x(t,s))$, $a < t < b$, $x(a,s) = x_a(s)$, där

$$f(t, x(t,s)) := \begin{bmatrix} x_2(t,s) \\ x_1(t,s)^3 + t \end{bmatrix}, \quad x_a(s) = \begin{bmatrix} c_1 \\ s \end{bmatrix},$$ med extra villkor

$x_1(b,s) = c_2$.

(b) Formulera sekantmetoden för att bestämma s.

Lösning Vi vill lösa $x_1(b,s) - c_2 = 0$ med sekantmetoden, Newtons metod med derivata approximerad med differenskvot, alltså

$$s_{k+1} = s_k - \frac{x_1(b,s_k) - c_2}{\dfrac{(x_1(b,s_k) - c_2) - (x_1(b,s_{k-1}) - c_2)}{s_k - s_{k-1}}}$$

$$= s_k - \frac{(x_1(b,s_k) - c_2)(s_k - s_{k-1})}{x_1(b,s_k) - x_1(b,s_{k-1})} .$$

Observera att denna metod kräver två startgissningar s_{-1} och s_0 för att kunna beräkna $s_1, s_2, \ldots$

LANA 2016 Demo 15-4

NA6.26 Skissera det ekvationssystem som fås vid lösningsapproximation för randvärdesproblemet

$$y''(x) + 2y'(x) - 3y(x) = f(x), \quad 0 < x < 1,$$
$$y'(0) = 1, \quad y'(1) = 2,$$

genom central differenskvotsapproximation av derivator och steglängd h.

Lösning Vi gör en likformig indelning av $[0,1]$ i $N = \frac{1}{h}$ delintervall mellan punkterna $0 = x_0 < x_1 < \dots < x_N = 1$, $x_n = nh$, och låter $y_n \approx y(x_n)$ vara de approximativa lösningsvärdena.

I $x_0 = 0$ gäller randvillkoret $y'(0) = 1$. Vi approximerar med en framåtdifferens (eftersom vi inte har någon punkt x_{-1}):

$$\frac{y_1 - y_0}{h} = 1$$

I $x_1, \dots, x_{N-1}$ gäller differentialekvationen $y''(x_n) + 2y'(x_n) - 3y(x_n) = f(x_n)$. Vi approximerar med centrala differenskvoter och får

$$\frac{y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1}}{h^2} + 2\,\frac{y_{n+1} - y_{n-1}}{2h} - 3y_n = f_n := f(x_n), \quad n = 1, \dots, N-1.$$

I x_N gäller randvillkoret $y'(1) = 2$. Vi approximerar med en bakåtdifferens (i avsaknad av punkten x_{N+1}):

$$\frac{y_N - y_{N-1}}{h} = 2.$$

Dessa ekvationer kan sammanfattas på matrisform som

$$(R + D_2 + 2D_1 - 3D_0)\,y = b$$

med $R = \frac{1}{h}\begin{bmatrix} -1 & 1 & & \\ & & 0 & \\ & & -1 & 1 \end{bmatrix}$, $D_2 = \frac{1}{h^2}\begin{bmatrix} 0 & 0 & & & \\ 1 & -2 & 1 & & 0 \\ & & \ddots & & \\ 0 & & 1 & -2 & 1 \\ & & & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$D_1 = \frac{1}{2h}\begin{bmatrix} 0 & 0 & & & \\ -1 & 0 & 1 & & 0 \\ & & \ddots & & \\ 0 & & -1 & 0 & 1 \\ & & & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $D_0 = \begin{bmatrix} 0 & & & \\ & 1 & & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & & 1 & \\ & & & 0 \end{bmatrix}$

$y = (y_0, \dots, y_N)$, $b = (1, f_1, \dots, f_{N-1}, 2)$.