LANA 2016 Demo 2-1

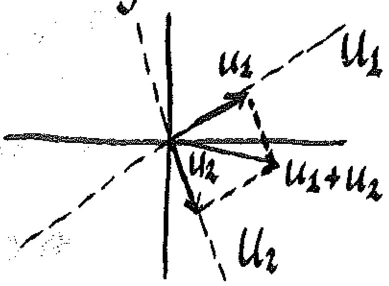
Rättelse: Övning LA1.9 (h), i argumentet för att M inte är ~~[illegible]~~ en affin mängd krävs ett mer sofistikerat motexempel. T.ex. $u' = (1-v_1, -v_2, 0, 0) \in U$, $u'' = (\sin\theta - v_1, \cos\theta - v_2, 0, 0) \in U$, men $u = u' + u'' \notin U$ om vi väljer θ s.a. $(1-v_1)\sin\theta \geq 0$ och $v_2\cos\theta \leq 0$ eftersom

$$(u_1+v_1)^2 + (u_2+v_2)^2 = 1 + (1-v_1)^2 + v_2^2 + 2(1-v_1)\sin\theta - 2v_2\cos\theta$$

är större än 1 i detta fall (utom om $v_1 = 1, v_2 = 0$, men i detta fall kan vi ersätta u' med $(-v_1, 1-v_2, 0, 0)$).

LA1.29 $U_1, U_2 \subset V$ är underrum sådana att det finns vektorer $u_1 \in U_1 : u_1 \notin U_2$ och $u_2 \in U_2 : u_2 \notin U_1$. Visa att $U_1 \cup U_2$ inte är ett underrum till V.

Lösning Vi börjar med en principskiss när U_1 och U_2 är linjer genom origo i $\mathbb{R}^2$.



Observera att
$u_1 + u_2 \notin U_1 \cup U_2$
denna observation använder vi som bas för det allmänna beviset.

I det allmänna fallet: Observera att $u_1 \in U_1 \cup U_2$ och $u_2 \in U_1 \cup U_2$, men $u_1 + u_2 \notin U_1 \cup U_2$ eftersom, om vi antar att $u_1 + u_2 \in U_1$ får vi $u_1 + u_2 + (-u_1) \in U_1$ (eftersom $u_1 \in U_1$ som är ett vektorrum) och därmed $u_2 \in U_1$, vilket är en motsägelse.
På samma sätt ger antagandet $u_1 + u_2 \in U_2$ att $u_1 + u_2 + (-u_2) \in U_2$ och $u_1 \in U_2$, vilket också är en motsägelse. Alltså $u_1 + u_2 \notin U_1$ och $u_1 + u_2 \in U_2$ så $u_1 + u_2 \in U_1 \cup U_2$, så $U_1 \cup U_2$ är inte slutet under addition och alltså inte ett underrum.

LANA 2016 Demo 2-2

LA1.32 Bestäm en matris A med den givna mängden som värderum $V(A)$.

(a) $$\left\{ \begin{bmatrix} 2s+3t \\ r+s-2t \\ 4r+s \\ 3r-s-t \end{bmatrix} ; r,s,t \in \mathbb{R} \right\}$$

Lösning Kom ihåg att $V(A) = \{ Ax ; x \in \mathbb{R}^n \}$ (om $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$).

Observera $$\begin{bmatrix} 2s+3t \\ r+s-2t \\ 4r+s \\ 3r-s-t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix} r + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} s + \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} t = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \\ 4 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \\ s \\ t \end{bmatrix}$$

så matrisen ovan är en sådan matris A.

(b) $$\left\{ \begin{bmatrix} b-c \\ 2b+c+d \\ 5c-4d \\ d \end{bmatrix} ; b,c,d \in \mathbb{R} \right\}$$

Lösning Som i (a) observerar vi

$$\begin{bmatrix} b-c \\ 2b+c+d \\ 5c-4d \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} b + \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix} c + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix} d = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b \\ c \\ d \end{bmatrix}$$

där åter igen den sista matrisen är en sådan som söks.

LA1.33 Bestäm en matris vars nollrum $N(A)$ är den givna mängden.

(a) $$\left\{ \begin{bmatrix} t \\ s \\ s-t \end{bmatrix} ; s,t \in \mathbb{R} \right\}$$

Lösning Kom ihåg $N(A) = \{ x \in \mathbb{R}^n : Ax = 0 \}$ (om $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$).

Observera: För att få $N(A) \subset \mathbb{R}^3$, som här, krävs $A \in \mathbb{R}^{m\times 3}$ för något m. Vi kan alltså skriva $A = [a_1\ a_2\ a_3]$ för några kolonner a_1, a_2, a_3 sådana att

$$0 = A \begin{bmatrix} t \\ s \\ s-t \end{bmatrix} = [a_1\ a_2\ a_3] \begin{bmatrix} t \\ s \\ s-t \end{bmatrix} = t a_1 + s a_2 + (s-t) a_3 \quad \forall s,t \in \mathbb{R}$$

LA1.33(a)(forts.) Välj $t=1$, $s=0$: Vi får $a_1 - a_3 = 0$ $\Rightarrow a_3 = a_1$. Välj $t=0$, $s=1$: Vi får $a_2 + a_3 = 0 \Rightarrow a_2 = -a_3 = -a_1$ så $A = [a_1 \;\; -a_1 \;\; a_1]$. För att inte få ytterligare vektorer i $N(A)$ räcker det nu att ta $a_1 \neq 0$.

Slutsats: Alla matriser på formen $[a_1 \;\; -a_1 \;\; a_1]$, $a_1 \neq 0$ har $N(A) = \left\{ \begin{bmatrix} t \\ s \\ s-t \end{bmatrix} ; \; s,t \in \mathbb{R} \right\}$.

T. ex. $A = [1 \; -1 \; 1]$ eller $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 3 & -3 & 3 \end{bmatrix}$.

(b) $\left\{ \begin{bmatrix} t \\ t+u \\ -s \\ s-u \end{bmatrix} : \; s,t,u \in \mathbb{R} \right\}$

Lösning Som i (a) får vi $A = [a_1 \;\; a_2 \;\; a_3 \;\; a_4]$ med

$$ta_1 + (t+u)a_2 - sa_3 + (s-u)a_4 = 0 \quad \forall s,t,u \in \mathbb{R}.$$

$s=1$, $t,u=0$: $-a_3 + a_4 = 0 \Rightarrow a_3 = a_4$

$t=1$, $s,u=0$: $a_1 + a_2 = 0 \Rightarrow a_2 = -a_1$

$u=1$, $s,t=0$: $a_2 - a_4 = 0 \Rightarrow a_4 = a_2$

så $A = [a_1 \;\; -a_1 \;\; -a_1 \;\; -a_1]$ och som i (a) räcker det nu att välja någon vektor $a_1 \in \mathbb{R}^m$, $a_1 \neq 0$.

LA1.35 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 & -3 \end{bmatrix}$.

(a, Matlab) Har $N(A), N(B) \subset \mathbb{R}^4$ några gemensamma vektorer $\neq 0$?

Lösning Vi matar in A och B i Matlab. Kommandot null(A) (resp. null(B)) ger en matris vars kolonner spänner upp $N(A)$ (resp. $N(B)$). Vi får

$$\text{null}(A) \approx \begin{bmatrix} 0.3000 & 0.4000 \\ 0.2657 & -0.8243 \\ -0.8657 & 0.0243 \\ 0.3000 & 0.4000 \end{bmatrix}, \text{null}(B) \approx \begin{bmatrix} -0.9112 & 0.0143 \\ 0.1540 & -0.8597 \\ 0.3786 & 0.4227 \\ -0.0513 & 0.2866 \end{bmatrix}$$

Skriv $N(A) = \text{span}\{u_1, u_2\}$, $N(B) = \text{span}\{u_3, u_4\}$.

Om gemensamma vektorer $\neq 0$ ska finnas krävs alltså vikter $\alpha_1, \ldots \alpha_4 \in \mathbb{R}$ s.a. $\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 = \alpha_3 u_3 + \alpha_4 u_4 \Rightarrow [u_1 \;\; u_2 \;\; -u_3 \;\; -u_4] \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{bmatrix} = 0$, $\alpha_i \neq 0$ något i

<u>LA 1.35 (forts.)</u> I Matlab undersöker vi detta genom att radreducera den utökade matrisen $[u_1 \; u_2 \; -u_3 \; -u_4]$ med kommandot

rref([null(A), -null(B)]) som returnerar

$$\begin{bmatrix} 1.0000 & 0 & 0 & -0.3218 \\ 0 & 1.0000 & 0 & 0.9184 \\ 0 & 0 & 1.0000 & 0.3167 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

så systemet har icke-triviala lösningar. Alltså finns gemensamma vektorer.

<u>(b)</u> Har värderummen $V(A)$, $V(B)$ gemensamma vektorer $\neq 0$?

<u>Lösning</u> Vi söker vektorer som spänner upp $V(A)$ och $V(B)$ genom <u>kolonnreduktion</u> till trappstegsform

$$A = \begin{array}{c}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\ \boxed{-1} \end{array} \overset{KE}{\sim} \begin{array}{c}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \boxed{-2} \end{array} \overset{KE}{\sim} \begin{array}{c}\begin{bmatrix} -3 & 2 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \boxed{+1} \end{array}$$

$$\overset{KE}{\sim} \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow V(A) = \text{span}\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

$$B = \begin{array}{c}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 & -3 \end{bmatrix} \\ \boxed{-2} \end{array} \overset{KE}{\sim} \begin{array}{c}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & -3 \end{bmatrix} \\ \boxed{-2} \quad \boxed{\times \tfrac{1}{3}} \end{array} \overset{KE}{\sim} \begin{array}{c}\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \\ \boxed{+1} \end{array}$$

$$\overset{KE}{\sim} \begin{array}{c}\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \\ \boxed{+1} \end{array} \overset{KE}{\sim} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow V(B) = \text{span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Vi ser att $V(A)$ och $V(B)$ tillsammans har 4 basvektorer, vilka omöjligt kan vara oberoende i $\mathbb{R}^3$, alltså finns gemensamma vektorer $\neq 0$ i $V(A)$ och $V(B)$.

LANA 2016 Demo 2-5

LA 1.40 Vilka av avbildningarna från $\mathbb{R}^2$ till $\mathbb{R}^2$ är linjära?

$$T_1(x) = (x_2^2, x_2),$$
$$T_2(x) = (x_1+x_2, x_1),$$
$$T_3(x) = (x_1, 1).$$

Lösning Kom ihåg definitionen av en linjär avbildning $T: U \to V$:
T är linjär om $T(u+v) = T(u)+T(v) \;\forall u,v \in U$
och $T(\alpha u) = \alpha T(u) \;\forall \alpha \in \mathbb{R}, u \in U$, alternativt
$T(\alpha u + \beta v) = \alpha T(u) + \beta T(v) \;\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, u, v \in U$.

Vi söker motexempel eller visar det senare:

För T_1: $2T_1(0,1) = 2(1^2,0) = (2,0)$, men
$T_1(0,2) = (2^2,0) = (4,0) \neq (2,0)$
så T_1 är inte linjär.

För T_2: Vi kan skriva $T_2(x) = Ax$ med $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$
och eftersom matrismultiplikation är linjär
så är även T_2 det.

För T_3: $T_3(x) + T_3(x) = (x_1, 1) + (x_1, 1) = (2x_1, 2)$, men
$T_3(x+x) = T_3(2x) = (2x_1, 1) \neq T_3(x) + T_3(x)$
så T_3 är inte linjär.

LA 1.41 Visa att mängden av alla linjära avbildningar $F: U \to V$ för två vektorrum U, V, bildar ett vektorrum med operationerna

$$(F_1 \oplus F_2)(u) := F_1(u) \oplus_V F_2(u),$$
$$(\alpha \odot F)(u) := \alpha \odot_V F(u).$$

(Observera att vi skiljer på operationer $\odot, \oplus$ i detta rum, $\odot_U, \oplus_U$ i U, och $\odot_V, \oplus_V$ i V).

Lösning Vi måste kontrollera de tio kriterierna från definition 1.1:

LANA 2016 Demo 2-6

LA 1.41 (forts.) Låt $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, $x, y \in U$

(1) Vi ska visa att $F_1 \oplus F_2$ är en linjär avbildning:

$$(F_1 \oplus F_2)(\alpha \odot_U x \oplus_U \beta \odot_U y) = F_1(\alpha \odot_U x \oplus_U \beta \odot_U y) \oplus_V F_2(\alpha \odot_U x \oplus_U \beta \odot_U y)$$
$$= \left(\alpha \odot_V F_1(x) \oplus_V \beta \odot_V F_1(y)\right) \oplus_V \left(\alpha \odot_V F_2(x) \oplus_V \beta \odot_V F_2(y)\right)$$
$$= \alpha \odot_V (F_1(x) \oplus_V F_2(x)) \oplus_V \beta \odot_V (F_1(y) \oplus_V F_2(y))$$
$$= \alpha \odot_V (F_1 \oplus F_2)(x) \oplus_V \beta \odot_V (F_1 \oplus F_2)(y)$$

(2) Vi ska visa att $\alpha \odot F_1$ är en linjär avbildning:

$$(\alpha \odot F_1)(\beta \odot_U x \oplus_U \gamma \odot_U y) = \alpha \odot_V F_1(\beta \odot_U x \oplus_U \gamma \odot_U y)$$
$$= \alpha \odot_V \left(\beta \odot_V F_1(x) \oplus_V \gamma \odot_V F_1(y)\right)$$
$$= \beta \odot_V (\alpha \odot_V F_1(x)) \oplus_V \gamma \odot_V (\alpha \odot_V F_1(y))$$
$$= \beta \odot_V (\alpha \odot F_1)(x) \oplus_V \gamma \odot_V (\alpha \odot F_1)(y)$$

(3) $(F_1 \oplus F_2)(x) = F_1(x) \oplus_V F_2(x) = F_2(x) \oplus_V F_1(x) = (F_2 \oplus F_1)(x)$

(4) $\left(F_1 \oplus (F_2 \oplus F_3)\right)(x) = F_1(x) \oplus_V (F_2 \oplus F_3)(x) = F_1(x) \oplus_V \left(F_2(x) \oplus_V F_3(x)\right)$

$$= \left(F_1(x) \oplus_V F_2(x)\right) \oplus_V F_3(x) = (F_1 \oplus F_2)(x) \oplus_V F_3(x) = \left((F_1 \oplus F_2) \oplus F_3\right)(x)$$

(5) Vi visar att nollavbildningen $\mathbf{0}(x) = 0_V \, \forall x \in U$ är nollelement:

$$(F \oplus \mathbf{0})(x) = F(x) \oplus_V \mathbf{0}(x) = F(x) \oplus_V 0_V = F(x)$$

(6) Vi visar att $(-1) \odot F$ är additiv invers till F:

$$\left(F \oplus ((-1) \odot F)\right)(x) = F(x) \oplus_V ((-1) \odot F)(x) = F(x) \oplus_V (-1) \odot_V F(x)$$
$$= F(x) \oplus_V (-F(x)) = 0_V$$

(7) $\left(\alpha \odot (\beta \odot F)\right)(x) = \alpha \odot_V (\beta \odot F)(x) = \alpha \odot_V (\beta \odot_V F(x))$

$$= (\alpha\beta) \odot_V F(x) = \left((\alpha\beta) \odot F\right)(x)$$

(8) $\left(\alpha \odot (F_1 \oplus F_2)\right)(x) = \alpha \odot_V (F_1 \oplus F_2)(x) = \alpha \odot_V \left(F_1(x) \oplus_V F_2(x)\right)$

$$= \left(\alpha \odot_V F_1(x)\right) \oplus_V \left(\alpha \odot_V F_2(x)\right) = (\alpha \odot F_1)(x) \oplus_V (\alpha \odot F_2)(x)$$
$$= \left((\alpha \odot F_1) \oplus (\alpha \odot F_2)\right)(x)$$

(9) $\left((\alpha + \beta) \odot F\right)(x) = (\alpha + \beta) \odot_V F(x) = (\alpha \odot_V F(x)) \oplus_V (\beta \odot_V F(x))$

$$= (\alpha \odot F)(x) \oplus_V (\beta \odot F)(x) = \left((\alpha \odot F) \oplus (\beta \odot F)\right)(x)$$

(10) $(1 \odot F)(x) = 1 \odot_V F(x) = F(x)$.

LANA 2016 Demo 2-7

LA1.43 Betrakta $T:\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ med
$$T(x_1,x_2,x_3) = (x_1 - x_2 + 2x_3,\ 2x_1 + x_2,\ -x_1 - 2x_2 + 2x_3).$$

(a) Visa att T är linjär.

Lösning $T(x) = Ax$ med $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 2 \end{bmatrix}$.

Matrismultiplikation är linjär, därmed också T.

(b) Visa att $N(T)$ är en rät linje och bestäm dess ekvation.

Lösning Vi löser $T(x) = 0 \iff Ax = 0$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 2 \end{bmatrix} \boxed{-2}\ \boxed{+1} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -4 \\ 0 & -3 & 4 \end{bmatrix} \boxed{+1} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Parametrisera: $x_3 = t$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & t \end{array}\right] \boxed{4}\ \boxed{-2} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & -2t \\ 0 & 3 & 0 & 4t \\ 0 & 0 & 1 & t \end{array}\right] \boxed{\times \tfrac{1}{3}} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & -2t \\ 0 & 1 & 0 & 4t/3 \\ 0 & 0 & 1 & t \end{array}\right] \boxed{+1}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -2t/3 \\ 0 & 1 & 0 & 4t/3 \\ 0 & 0 & 1 & t \end{array}\right] \implies N(A) = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 : x = \frac{t}{3}\begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix},\ t \in \mathbb{R} \right\}$$

vilket är en rät linje med den givna ekvationen (på parameterform).

(c) Visa att $V(T)$ är ett plan och bestäm dess ekvation.

Lösning $V(T) = V(A)$. Vi bestämmer $V(A)$ med kolonnreduktion

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 2 \end{bmatrix} \overset{KE}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 2 & -3 & 4 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \overset{KE}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 2 & -3 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \overset{KE}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\boxed{-2}\ \boxed{+2}\qquad \boxed{\tfrac{4}{3}}\qquad \boxed{\times -\tfrac{1}{3}}$

$$\implies V(A) = \operatorname{span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 : x = s\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},\ s,t \in \mathbb{R} \right\}$$

vilket beskriver ett plan med den givna ekvationen (på parameterform).

(d) Bestäm alla urbilder till $(3,2,1)$ resp. $(2,1,3)$.

Lösning Urbilden av en vektor v är mängden (här)
$$\{ x \in \mathbb{R}^3 : T(x) = Ax = v \}.$$

Vi löser alltså $Ax = v$ och får

LA1.43 (d) (forts.)

$$v = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} : \quad [A|v] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & -2 & 2 & 1 \end{array}\right] \boxed{-2}\,\boxed{+1} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & -4 & -4 \\ 0 & -3 & 4 & 4 \end{array}\right] \boxed{+1}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Parametrisera: $x_3 = t$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & t \end{array}\right] \boxed{+4}\,\boxed{-2} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 3-2t \\ 0 & 3 & 0 & -4+4t \\ 0 & 0 & 1 & t \end{array}\right] \boxed{\times \tfrac{1}{3}}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 3-2t \\ 0 & 1 & 0 & -4/3+4t/3 \\ 0 & 0 & 1 & t \end{array}\right] \boxed{+1} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 5/3-2t/3 \\ 0 & 1 & 0 & -4/3+4t/3 \\ 0 & 0 & 1 & t \end{array}\right]$$

$\therefore$ Urbilden av $(3,2,1)$ är $\left\{ \frac{1}{3}(5,-4,0) + \frac{t}{3}(-2,4,1),\ t \in \mathbb{R} \right\}$.

$$v = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} : \quad [A|v] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 2 & 3 \end{array}\right] \boxed{-2}\,\boxed{+1} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & -4 & -3 \\ 0 & -3 & 4 & 5 \end{array}\right] \boxed{+1}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & -4 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right]$$

Detta är en omöjlighet, systemet är inkompatibelt!

$\Rightarrow$ Urbilden av $(2,1,3)$ är $\emptyset$.

LA1.46 Betrakta $T: \mathbb{R}^{n\times n} \longrightarrow \mathbb{R}^{n\times n}$ med $T(A) = A + A^T$.

(a) Visa att T är linjär.

Lösning Låt $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} T(\alpha A + \beta B) &= (\alpha A + \beta B) + (\alpha A + \beta B)^T = \alpha A + \beta B + \alpha A^T + \beta B^T \\ &= \alpha(A + A^T) + \beta(B + B^T) = \alpha T(A) + \beta T(B). \end{aligned}$$

(b) Anta $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ är symmetrisk, alltså $B = B^T$. Bestäm en matris $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ sådan att $T(A) = B$.

Lösning Vi observerar att $B = \frac{1}{2}B + \frac{1}{2}B = \frac{1}{2}B + \frac{1}{2}B^T = \left(\frac{1}{2}B\right) + \left(\frac{1}{2}B\right)^T$, så $A = \frac{1}{2}B$ är <u>en</u> sådan matris, andra är också möjliga.

LANA 2016 Demo 2-9

LA1.46 (forts.)

(c) Beskriv nollrummet $N(T)$.

Lösning $T(A) = 0 \iff A + A^T = 0 \iff A^T = -A$

alltså $N(T) := \{ A \in \mathbb{R}^{n \times n} : A^T = -A \}$.

Sådana matriser kallas skevsymmetriska och kan skrivas på formen
$$A = \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \cdots \\ -a_{12} & 0 & a_{23} & \cdots \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots \end{bmatrix}.$$

(d) Visa att värderummet $V(T)$ är mängden $S^{n \times n}$ av alla symmetriska matriser i $\mathbb{R}^{n \times n}$.

Lösning Idén är att visa $V(T) \subset S^{n \times n}$ (dvs. alla element i $V(T)$ är i $S^{n \times n}$)

och $S^{n \times n} \subset V(T)$ (dvs. alla element i $S^{n \times n}$ är i $V(T)$).

Tillsammans medför dessa inklusioner att $S^{n \times n} = V(T)$.

- $V(T) \subset S^{n \times n}$: Antag $B \in V(T) \Rightarrow B = A + A^T$ för något $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$
$\Rightarrow B^T = (A + A^T)^T = A^T + (A^T)^T = A^T + A = A + A^T = B$
$\Rightarrow B \in S^{n \times n}$.
- $S^{n \times n} \subset V(T)$: Antag att $B \in S^{n \times n}$, i deluppgift (b) visade vi att $B = T(\frac{1}{2}B) \Rightarrow B \in V(T)$.