LANA 2016 Demo 3 - 1

LA1.16 Vilka av de givna mängderna är linjärt oberoende?

(a) $\{(1,-7,2),\ (0,5,-2),\ (1,1,1)\}$ i $\mathbb{R}^3$.

Lösning. Vi sätter upp vektorerna i en matris och kolonn- (eller rad-) reducerar, till trappstegsform för att finna största linjärt oberoende delmängd.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -7 & 5 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix} \overset{KE}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -7 & 5 & 8 \\ 2 & -2 & -1 \end{bmatrix} \overset{KE}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -7 & 5 & 0 \\ 2 & 2 & \frac{11}{5} \end{bmatrix}$$

$\boxed{-1}$ $\quad$ $\boxed{-\frac{8}{5}}$

∴ Vektorerna är linjärt oberoende (ingen noll-kolonn).

(b) $\{(1,0,2,-1),\ (1,2,-1,0),\ (1,1,0,-1)\}$ i $\mathbb{R}^4$.

Lösning. Som i (a):

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \overset{KE}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \overset{KE}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & -3 & -1/2 \\ -1 & 1 & -1/2 \end{bmatrix}$$

$\boxed{-1}$ $\boxed{-1}$ $\quad$ $\boxed{-1/2}$

∴ Vektorerna är linjärt oberoende.

(c) $\{(1,2,-1,-2,4),\ (6,1,5,3,2),\ (4,-3,7,7,-6)\}$ i $\mathbb{R}^5$.

Lösning Som i (a):

$$\begin{bmatrix} 1 & 6 & 4 \\ 2 & 1 & -3 \\ -1 & 5 & 7 \\ -2 & 3 & 7 \\ 4 & 2 & -6 \end{bmatrix} \overset{KE}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -11 & -11 \\ -1 & 11 & 11 \\ -2 & 15 & 15 \\ 4 & -22 & -22 \end{bmatrix} \overset{KE}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -11 & 0 \\ -1 & 11 & 0 \\ -2 & 15 & 0 \\ 4 & -22 & 0 \end{bmatrix}$$

$\boxed{-6}$ $\boxed{-4}$ $\quad$ $\boxed{-1}$

∴ Vektorerna är linjärt beroende (vi får en noll-kolonn).

LANA 2016 Demo 3-2

LA1.17 Visa att $(1,2,3,4)$, $(0,1,2,3)$, $(0,0,1,2)$, $(0,0,0,1)$ är en bas för $\mathbb{R}^4$ samt bestäm koordinater för $(1,1,1,1)$ i denna bas.

Lösning Den givna vektorerna är uppenbart linjärt oberoende (matrisen med vektorerna som kolonner är redan på trappstegsform). Fyra linjärt oberoende vektorer i $\mathbb{R}^4$ måste vara en bas för $\mathbb{R}^4$.

För att hitta koordinater $x_1, \dots, x_4$ för $(1,1,1,1)$ löser vi:

$$x_1\begin{bmatrix}1\\2\\3\\4\end{bmatrix} + x_2\begin{bmatrix}0\\1\\2\\3\end{bmatrix} + x_3\begin{bmatrix}0\\0\\1\\2\end{bmatrix} + x_4\begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\begin{bmatrix}1&0&0&0\\2&1&0&0\\3&2&1&0\\4&3&2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix} \Rightarrow \text{... lösning "som vanligt" ...}$$

$\Rightarrow \quad (x_1, x_2, x_3, x_4) = (1, -1, 0, 0)$. (Vilket man nog kan inse utan att gå igenom hela lösandet.)

LA1.18 Bestäm dimension av det underrum i $\mathbb{R}^4$ som genereras av vektorerna...

(a) ... $(1,1,1,1)$, $(4,2,-2,-3)$, $(3,1,-3,-4)$.

Lösning Vi konstaterar att denna dimension är det största antalet linjärt oberoende vektorer som återfinns i mängden. Som tidigare bestämmer vi det genom kolonn- (eller rad-) reduktion.

$$\begin{bmatrix}1&4&3\\1&2&1\\1&-2&-3\\1&-3&-4\end{bmatrix} \overset{KE}{\sim} \begin{bmatrix}1&0&0\\1&-2&-2\\1&-6&-6\\1&-7&-7\end{bmatrix} \overset{KE}{\sim} \begin{bmatrix}1&0&0\\1&-2&0\\1&-6&0\\1&-7&0\end{bmatrix}$$

$\because$ Dimensionen är 2. (2 icke-noll-kolonner)

(b) ... $(1,0,2,1)$, $(0,2,2,4)$, $(1,-1,1,-1)$.

Lösning Samma metod som i (a) ger

$$\begin{bmatrix}1&0&1\\0&2&-1\\2&2&1\\1&4&-1\end{bmatrix} \overset{KE}{\sim} \begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&-1\\2&2&-1\\1&4&-2\end{bmatrix} \overset{KE}{\sim} \begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&0\\2&2&0\\1&4&0\end{bmatrix}$$

$\because$ Dimensionen är 2.

LA 1.21 Vektorerna $v_1, \dots, v_k$ i $\mathbb{R}^n$ är linjärt oberoende. Vad är dimensionen av det underrum som genereras av
$\underbrace{v_1 - v_2}_{u_1}, \underbrace{v_2 - v_3}_{u_2}, \dots, \underbrace{v_{k-1} - v_k}_{u_{k-1}}, \underbrace{v_k - v_1}_{u_k}$?

Lösning Vi ser att $u_1, \dots, u_k$ är linjärt beroende, för
$$u_1 + u_2 + \dots + u_{k-1} + u_k = v_1 - v_2 + v_2 - v_3 + \dots + v_{k-1} - v_k + v_k - v_1 = 0$$
(för varje i förekommer v_i en gång och $-v_i$ en gång).
(Vi drar oss till minnes att definitionen av linjärt oberoende $x_1, \dots, x_m$ är $\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_m x_m = 0 \iff \alpha_1 = \dots = \alpha_m = 0$, men ovan tog vi alla vikter $= 1$.)
Detta betyder att $\dim \operatorname{span}\{u_1, \dots, u_k\} < k$ (vi har inte k stycken linjärt oberoende vektorer).

Om vi å andra sidan tar bort en vektor, t.ex. u_k får vi
$$0 = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \dots + \alpha_{k-1} u_{k-1} = \alpha_1(v_1 - v_2) + \alpha_2(v_2 - v_3) + \dots + \alpha_{k-1}\overbrace{}^{(v_{k-1} - v_k)}$$
$$= \alpha_1 v_1 + (\alpha_2 - \alpha_1) v_2 + \dots + (\alpha_{k-1} - \alpha_{k-2}) v_{k-1} - \alpha_{k-1} v_k$$
$$\iff \alpha_1 = \alpha_2 - \alpha_1 = \dots = \alpha_{k-1} - \alpha_{k-2} = -\alpha_{k-1} = 0 \quad (v_1, \dots, v_k \text{ är linjärt oberoende})$$
$$\iff \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_{k-1} = 0$$
så $u_1, \dots, u_{k-1}$ är linjärt oberoende och därmed är $\dim \operatorname{span}\{u_1, \dots, u_k\} \geq k-1$.
Slutsats: $\dim \operatorname{span}\{u_1, \dots, u_k\} = k-1$.

LA 1.23 Visa att funktionerna är linjärt beroende

(a) $\sin(2t)$, $\cos(2t)$, $\sin(t)^2$, $\cos(t)^2$

Lösning Vi uttrycker någon av funktionerna som en linjärkombination av de andra. Kom ihåg formeln för dubbel vinkel för cosinus: $\cos(2t) = \cos(t)^2 - \sin(t)^2$.

(b) $\ln(t^6+1)$, $\ln(t^4 - t^2 + 1)$, $\ln(t^2+1)$.

Lösning Observera att $(t^4 - t^2 + 1)(t^2+1) = t^6 + 1$ och kom ihåg logaritmlagar:
$$\ln(t^6+1) = \ln\big((t^4 - t^2 + 1)(t^2+1)\big) = \ln(t^4 - t^2 + 1) + \ln(t^2+1).$$

LANA 2016 Demo 3–4

(c) $\sin(t+\alpha)$, $\sin(t+\beta)$, $\sin(t+\gamma)$, $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$.

Lösning Vi antar $0 = x_1 \sin(t+\alpha) + x_2 \sin(t+\beta) + x_3 \sin(t+\gamma)$

$$= \{ \sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a) \}$$

$$= \big(x_1 \sin(\alpha) + x_2 \sin(\beta) + x_3 \sin(\gamma)\big)\cos(t)$$

$$+ \big(x_1 \cos(\alpha) + x_2 \cos(\beta) + x_3 \cos(\gamma)\big)\sin(t)$$

$$\Longleftrightarrow \quad \begin{cases} x_1 \sin(\alpha) + x_2 \sin(\beta) + x_3 \sin(\gamma) = 0 \\ x_1 \cos(\alpha) + x_2 \cos(\beta) + x_3 \cos(\gamma) = 0 \end{cases} \qquad (*)$$

eftersom $\sin(t)$, $\cos(t)$ är linjärt oberoende. Bevis:

Antag $\alpha_1 \sin(t) + \alpha_2 \cos(t) = 0 \quad \forall t$. I synnerhet får vi

$0 = \alpha_1 \sin(0) + \alpha_2 \cos(0) = \alpha_2$ och

$0 = \alpha_1 \sin(\frac{\pi}{2}) + \alpha_2 \cos(\frac{\pi}{2}) = \alpha_1$

så $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$.

Det linjära ekvationssystemet $(*)$ ovan är underbestämt och har alltså icke-triviala lösningar.

LA1.28 Låt $U_1 = \operatorname{span}\{\underbrace{(1,2,0,1)}_{v_1}, \underbrace{(1,1,1,0)}_{v_2}\}$, och

$U_2 = \operatorname{span}\{\underbrace{(1,0,1,0)}_{v_3}, \underbrace{(1,3,0,1)}_{v_4}\}$. Bestäm $\dim(U_1 + U_2)$

och $\dim(U_1 \cap U_2)$.

Lösning $U_1 + U_2 = \{ u = u_1 + u_2 : u_1 \in U_1, u_2 \in U_2 \} = \operatorname{span}\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \overset{KE}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \overset{KE}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \overset{KE}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\boxed{-1}$ $\boxed{-1}$ $\boxed{-1}$

$\therefore \dim(U_1 + U_1) = 3$ (tre oberoende vektorer)

$v \in U_1 \cap U_2 \Longleftrightarrow v \in U_1$ och $v \in U_2$, dvs. det finns $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}$ sådana att $x_1 v_1 + x_2 v_2 = v = x_3 v_3 + x_4 v_4$ alltså

$x_1 v_1 + x_2 v_2 + (-x_3) v_3 + (-x_4) v_4 = 0$ eller $(x_1, x_2, -x_3, -x_4) \in N([v_1\ v_2\ v_3\ v_4])$.

Så $\dim(U_1 \cap U_2) = \dim N([v_1\ v_2\ v_3\ v_4]) = \{\text{Dimensionssatsen}\}$

$= 4 - \dim V([v_1\ v_2\ v_3\ v_4]) = \{\text{enl. ovan}\} = 4 - 3 = 1$.

LANA 2016 Demo 3-5

LA1.30(a) Ange en bas för nollrummet till $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 3 \\ 2 & 0 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 8 & 7 \end{bmatrix}$.

Lösning Vi beräknar först $N(A)$.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 3 \\ 2 & 0 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 8 & 7 \end{bmatrix} \boxed{-2}\ \boxed{-3} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & -2 & -2 & -4 \\ 0 & -1 & -1 & -2 \end{bmatrix} \boxed{-\tfrac{1}{2}} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & -2 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times -\tfrac{1}{2}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$ Parametriserar $x_3 = s,\ x_4 = t$:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & s \\ 0 & 0 & 0 & 1 & t \end{array}\right] \boxed{-2}\ \boxed{-3} \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 3 & 0 & -3t \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -2t \\ 0 & 0 & 1 & 0 & s \\ 0 & 0 & 0 & 1 & t \end{array}\right] \boxed{-1}\ \boxed{-3}$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & -3s-3t \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -s-2t \\ 0 & 0 & 1 & 0 & s \\ 0 & 0 & 0 & 1 & t \end{array}\right] \boxed{-1} \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -2s-t \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -s-2t \\ 0 & 0 & 1 & 0 & s \\ 0 & 0 & 0 & 1 & t \end{array}\right]$$

så $N(A) = \{ s(-2,-1,1,0) + t(-1,-2,0,1) ;\ s,t \in \mathbb{R} \}$
med bas $(-2,-1,1,0),\ (-1,-2,0,1)$.

LA1.31(a) Bestäm bas för $V(A)$ med samma A som i LA1.30(a).

Lösning Som tidigare använder vi kolonnoperationer för att sortera ut en bas:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 3 \\ 2 & 0 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 8 & 7 \end{bmatrix} \overset{KE}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & -2 & -4 \\ 3 & -1 & -1 & -2 \end{bmatrix} \overset{KE}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\boxed{-1}$ $\boxed{-3}$ $\boxed{-3}$ $\qquad$ $\boxed{-1}$ $\boxed{-2}$

så $V(A) = \text{span}\{ (1,2,3), (0,-2,-1) \}$ med de vektorerna som bas.

LA1.37(a) Ange rangen av $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & -2 \\ 2 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & -1 \end{bmatrix}$.

Lösning $\text{rang}(A) = \dim V(A)$ som kan bestämmas enligt ovan:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & -2 \\ 2 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & -1 \end{bmatrix} \overset{KE}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -5 & -5 & 5 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \overset{KE}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -5 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\boxed{-3}$ $\boxed{-5}$ $\boxed{+2}$ $\qquad$ $\boxed{-1}$ $\boxed{+1}$

$\therefore\ \text{rang}(A) = \dim V(A) = 2.$

(Not: I Matlab skriver vi rank(A))