LANA 2016 Demo 4-1

LA1.48 $T: V \longrightarrow W$ linjärt och $v_1, \dots, v_p$ är linjärt oberoende i V. Visa att $T(v_1), \dots, T(v_p)$ är linjärt oberoende i W.

Lösning $v_1, \dots, v_p$ är beroende, så det finns $\alpha_1, \dots, \alpha_p \in \mathbb{R}$ så att $\alpha_i \neq 0$ för något i och $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_p v_p = 0$.
Då T är linjär gäller

$$0 = T(0) = T(\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_p v_p) = \alpha_1 T(v_1) + \dots + \alpha_p T(v_p)$$

vilket visar att även $T(v_1), \dots, T(v_p)$ är linjärt beroende.

Not: Samma påstående gäller inte för oberoende $v_1, \dots, v_p$ om inte T också har full rang.

LA 1.49

$$\mathcal{B} = \{u_1, u_2, u_3\} := \{(2,1,1), (2,-1,1), (1,2,1)\}$$
$$\mathcal{B}' = \{v_1, v_2, v_3\} := \{(3,1,-5), (1,1,-3), (-1,0,2)\}$$

är baser för $\mathbb{R}^3$.

(a) ~~Bestäm~~ övergångsmatrisen $T_{\mathcal{B}' \leftarrow \mathcal{B}}$ från $\mathcal{B}$ till $\mathcal{B}'$.

Lösning Beteckna koordinatvektorerna $[x]_{\mathcal{B}} = (x_1, x_2, x_3)$, $[x]_{\mathcal{B}'} = (x_1', x_2', x_3')$. Det gäller att

$$x_1' v_1 + x_2' v_2 + x_3' v_3 = x = x_1 u_1 + x_2 u_2 + x_3 u_3$$
$$\Longrightarrow [v_1\ v_2\ v_3][x]_{\mathcal{B}'} = [u_1\ u_2\ u_3][x]_{\mathcal{B}}$$
$$\Longrightarrow [x]_{\mathcal{B}'} = \underbrace{[v_1\ v_2\ v_3]^{-1}[u_1\ u_2\ u_3]}_{\text{Denna matris är just } T_{\mathcal{B}' \leftarrow \mathcal{B}}.}[x]_{\mathcal{B}}$$

För att beräkna $T_{\mathcal{B}' \leftarrow \mathcal{B}}$ löser vi

$$[v_1\ v_2\ v_3 \mid u_1\ u_2\ u_3] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 1 & -1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & -3 & 2 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \sim \cdots$$

$$\cdots \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & 2 & 5/2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -3 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 1 & 6 \end{array}\right] \Longrightarrow T_{\mathcal{B}' \leftarrow \mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 5/2 \\ -2 & -3 & -1/2 \\ 5 & 1 & 6 \end{bmatrix}.$$

(b) Låt $w = (-5, 8, -5)$. Bestäm koordinater för w i $\mathcal{B}$ och $\mathcal{B}'$.

Lösning Låt $\mathcal{E} = \{e_1, e_2, e_3\}$ vara standardbasen. Som ovan gäller

$$[w]_{\mathcal{B}} = T_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{E}}[w]_{\mathcal{E}} = [u_1\ u_2\ u_3]^{-1}[e_1\ e_2\ e_3][w]_{\mathcal{E}} = \cdots = \begin{bmatrix} 9 \\ -9 \\ -5 \end{bmatrix}$$

sedan använder vi del (a): $[w]_{\mathcal{B}'} = T_{\mathcal{B}' \leftarrow \mathcal{B}}[w]_{\mathcal{B}} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -7 \\ 23 \\ 12 \end{bmatrix}$.

LANA 2016 Demo 4-2

LA1.51 Låt $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, u_3\} := \{(3,-1,4), (2,0,-5), (8,-2,7)\}$ vara en bas för $\mathbb{R}^3$.

(a) Bestäm basbytesmatrisen från $\mathcal{B}$ till standardbasen $\mathcal{E} = \{e_1, e_2, e_3\}$.

Lösning Som tidigare gäller $T_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{B}} = [e_1\ e_2\ e_3]^{-1}[u_1\ u_2\ u_3]$
$= [u_1\ u_2\ u_3]$ eftersom $[e_1\ e_2\ e_3]$ är identitetsmatrisen.

(b) Bestäm $T_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{E}}$.

Lösning Samma metod som tidigare, eller att observera att $T_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{E}} = T_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{B}}^{-1}$, ger

$$T_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{E}} = [u_1\ u_2\ u_3]^{-1}[e_1\ e_2\ e_3] = [u_1\ u_2\ u_3]^{-1}$$
$$= \frac{1}{8}\begin{bmatrix} -10 & -54 & -4 \\ -1 & -11 & -2 \\ 5 & 23 & 2 \end{bmatrix}$$

(där inversen t.ex. kan beräknas genom att lösa $[u_1\ u_2\ u_3 \mid e_1\ e_2\ e_3]$.)

(c) Bestäm koordinater för $x = (1, 2, 1)$ i $\mathcal{B}$.

Lösning $[x]_{\mathcal{B}} = T_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{E}}[x]_{\mathcal{E}} = \frac{1}{8}\begin{bmatrix} -122 \\ -25 \\ 53 \end{bmatrix}$.

LA1.54 (a) Låt $\mathcal{E} = (e_1, e_2, e_3)$ och $\mathcal{E}' = (e_1', e_2', e_3')$ vara två baser för ett 3-dimensionellt linjärt rum V. Bestäm övergångsmatrisen $T_{\mathcal{E}'\leftarrow\mathcal{E}}$ om

$$e_1' = e_1 + e_2 + 3e_3,$$
$$e_2' = 2e_1 + 3e_2 + e_3,$$
$$e_3' = 2e_1 + 3e_2.$$

Lösning Vi börjar med $T_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{E}'}$. Beteckna $E = [e_1\ e_2\ e_3]$.
Enligt tidigare vet vi

$$T_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{E}'} = [e_1\ e_2\ e_3]^{-1}[e_1'\ e_2'\ e_3']$$
$$= E^{-1}[e_1+e_2+3e_3 \quad 2e_1+3e_2+e_3 \quad 2e_1+3e_2]$$
$$= E^{-1}\left[E\begin{bmatrix}1\\1\\3\end{bmatrix} \ E\begin{bmatrix}2\\3\\1\end{bmatrix} \ E\begin{bmatrix}2\\3\\0\end{bmatrix}\right] = \underbrace{E^{-1}E}_{=I}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

(liknar ett "transponat" av systemet ovan)

$$T_{\mathcal{E}'\leftarrow\mathcal{E}} = T_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{E}'}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -9 & 6 & 1 \\ 8 & -5 & -1 \end{bmatrix}.$$

LANA 2016 Demo 4-3

LA 1.58 $A \in \mathbb{R}^{3\times 8}$ har rang 3. Bestäm dim $N(A)$, dim Row(A), rang(A^T).

Lösning Dimensionssaten: $A \in \mathbb{R}^{m\times n} \Rightarrow \dim V(A) + \dim N(A) = n$

$\Rightarrow \dim N(A) = n - \dim V(A) = n - \text{rang}(A) = 8-3 = 5.$

Rangsaten: $\dim V(A) = \dim \text{Row}(A)$

så här gäller $\dim \text{Row}(A) = \dim V(A) = \text{rang}(A) = 3.$

Slutligen: $\text{rang}(A^T) = \dim V(A^T) = \dim \text{Col}(A^T) = \dim \text{Row}(A) = 3.$

LA 1.59 Vilken är största rangen för $A \in \mathbb{R}^{5\times 7}$? Vilken är största rangen om $A \in \mathbb{R}^{7\times 5}$? Vad är minsta möjlida dim $N(A)$ om $A \in \mathbb{R}^{6\times 8}$?

Lösning

- $A \in \mathbb{R}^{5\times 7}$: Rangsaten: $\text{rang}(A) = \text{rang}(A^T)$
  dvs. $\dim V(A) = \dim V(A^T)$ med $V(A) \subset \mathbb{R}^5$, $V(A^T) \subset \mathbb{R}^7$
  så $\text{rang}(A) \leq 5$, $\text{rang}(A^T) \leq 7$. Båda olikheterna måste uppfyllas, så $\text{rang}(A) \leq 5$ och maximalt $\text{rang}(A) = 5$.
- $A \in \mathbb{R}^{7\times 5}$: Som ovan, men med ombytta roller för A och A^T. Fortfarande gäller att maximalt har A rang 5.
- $A \in \mathbb{R}^{6\times 8}$: Dimensionssaten ger $\dim N(A) = 8 - \text{rang}(A)$ och som ovan gäller $\text{rang}(A) \leq 6$, så $\dim N(A) \geq 2$ med som minst $\dim N(A) = 2$.

LA 1.60 $u, v \in \mathbb{R}^n$, $u, v \neq 0$. Visa $\text{rang}(uv^T) = 1$.

Lösning $uv^T = [v_1 u \;\; v_2 u \;\; \dots \;\; v_n u]$, dvs. varje kolonn är en multipel av u, någon $\neq 0$ då $u, v \neq 0$

så

$$\text{rang}(uv^T) = \dim V(uv^T)$$
$$= \dim \text{span}\{u\}$$
$$= 1 \quad \text{då} \quad u \neq 0.$$

LANA 2016 Demo 4-4

NA 5.1 Lös ekvationssystemen dels med, dels utan radpivotering. Avrunda mellanresultat till 3 siffror.

(a) $\begin{bmatrix} 0.02 & 1.00 \\ 1.00 & 0.02 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.00 \\ 1.00 \end{bmatrix}$

Lösning Med pivotering (hållande störst element på diagonalen):

$$\left[\begin{array}{cc|c} 0.02 & 1.00 & 1.00 \\ 1.00 & 0.02 & 1.00 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1.00 & 0.02 & 1.00 \\ 0.02 & 1.00 & 1.00 \end{array}\right] \boxed{-0.02}$$

$$\sim \left[\begin{array}{cc|c} 1.00 & 0.02 & 1.00 \\ 0.00 & \underbrace{\cancel{0.9996}}_{\approx 1.00} & 0.98 \end{array}\right] \boxed{-0.02} \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1.00 & 0.00 & \overset{\approx 0.98}{\cancel{0.9804}} \\ 0.00 & 1.00 & 0.98 \end{array}\right]$$

$\Longrightarrow (x_1, x_2) \approx (0.98, 0.98)$

Utan pivotering:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 0.02 & 1.00 & 1.00 \\ 1.00 & 0.02 & 1.00 \end{array}\right] \boxed{-50.0} \sim \left[\begin{array}{cc|c} 0.02 & 1.00 & 1.00 \\ 0.00 & \underbrace{\cancel{-49.98}}_{\approx -50.0} & -49.0 \end{array}\right] \boxed{\times -0.02}$$

$$\sim \left[\begin{array}{cc|c} 0.02 & 1.00 & 1.00 \\ 0.00 & 1.00 & 0.98 \end{array}\right] \boxed{-1.00} \sim \left[\begin{array}{cc|c} 0.02 & 0.00 & 0.02 \\ 0.00 & 1.00 & 0.98 \end{array}\right] \boxed{\times 50.0}$$

$$\sim \left[\begin{array}{cc|c} 1.00 & 0.00 & 1.00 \\ 0.00 & 1.00 & 0.98 \end{array}\right] \Longrightarrow (x_1, x_2) \approx \cancel{(0.98,} \, (1.00, 0.98)$$

Not: Exakt: $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \dfrac{1}{0.9996}\begin{bmatrix} -0.02 & 1 \\ 1 & -0.02 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \dfrac{1}{0.9996}\begin{bmatrix} 0.98 \\ 0.98 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0.9804 \\ 0.9804 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} 0.00 & 1.00 \\ 2.00 & 3.00 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.00 \\ 1.00 \end{bmatrix}$

Lösning Med pivotering:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 0.00 & 1.00 & 0.00 \\ 2.00 & 3.00 & 1.00 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 2.00 & 3.00 & 1.00 \\ 0.00 & 1.00 & 0.00 \end{array}\right] \boxed{-3.00}$$

$$\sim \left[\begin{array}{cc|c} 2.00 & 0.00 & 1.00 \\ 0.00 & 1.00 & 0.00 \end{array}\right] \boxed{\times 0.50} \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1.00 & 0.00 & 0.50 \\ 0.00 & 1.00 & 0.00 \end{array}\right]$$

$\Longrightarrow (x_1, x_2) \approx (0.50, 0.00)$ (Stämmer exakt!)

Utan pivotering:

Går inte! Vi börjar genom division med 0!

LANA 2016 Demo 4–5

NA5.3 LU-faktorisera $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -5 & -3 \\ -1 & -5 & 8 & 4 \\ 4 & 2 & -5 & -7 \\ -2 & -4 & 7 & 5 \end{bmatrix}$ utan pivotering.

Lösning Vi reducerar A till U. Operationerna sparas med omvänt tecken i kolonnerna l_1, l_2, l_3, l_4 i L:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -5 & -3 \\ -1 & -5 & 8 & 4 \\ 4 & 2 & -5 & -7 \\ -2 & -4 & 7 & 5 \end{bmatrix} \boxed{+1}\ \boxed{-4}\ \boxed{+2} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & -5 & -3 \\ 0 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & -10 & 15 & 5 \\ 0 & 2 & -3 & -1 \end{bmatrix} \boxed{-5}\ \boxed{+1}$$

$l_1 = (1, -1, 4, -2)$ $\qquad$ $l_2 = (0, 1, 5, -1)$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & -5 & -3 \\ 0 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Vi gör inga fler operationer, så $l_3 = (0, 0, 1, 0)$, $l_4 = (0, 0, 0, 1)$.

$$\therefore \quad L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -5 & -3 \\ 0 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$