LANA 2016 Demo 5-1

NA 5.6 Lösa $Ax = b$ genom LU-faktorisering utan pivotering med

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -7 & -2 \\ -3 & 5 & 1 \\ 6 & -4 & 0 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} -7 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Lösning Proceduren:
1. LU-faktorisera $A = LU$.
2. Lös $Ly = b$ (framåtsubstitution).
3. Lös $Ux = y$ (bakåtsubstitution).

1. $$\begin{bmatrix} 3 & -7 & -2 \\ -3 & 5 & 1 \\ 6 & -4 & 0 \end{bmatrix} \boxed{+1} \boxed{-2} \sim \begin{bmatrix} 3 & -7 & -2 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 10 & 4 \end{bmatrix} \boxed{+5} \sim \begin{bmatrix} 3 & -7 & -2 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = U$$

$$l_1 = (1, -1, 2) \qquad l_2 = (0, 1, -5)$$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -5 & 1 \end{bmatrix}$$

2. $$Ly = b \iff y_1 = -7, \; -y_1 + y_2 = 5, \; 2y_1 - 5y_2 + y_3 = 2$$
$$\iff y_1 = -7, \quad y_2 = 5 + y_1 = -2, \quad y_3 = 2 - 2y_1 + 5y_2 = 6.$$

3. $$Ux = y \iff 3x_1 - 7x_2 - 2x_3 = -7, \; -2x_2 - x_3 = -2, \; -x_3 = 6.$$
$$\iff x_3 = -6, \quad x_2 = -\frac{1}{2}(-2 + x_3) = 4, \quad x_1 = \frac{1}{3}(-7 + 7x_2 + 2x_3) = 3$$

$\therefore$ $(x_1, x_2, x_3) = (3, 4, -6)$.

NA 5.8 Visa att $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ inte har någon LU-faktorisering utan pivotering.

Lösning Vi använder ett motsägelsebevis. Anta $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ l_{21} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ 0 & u_{22} \end{bmatrix}$

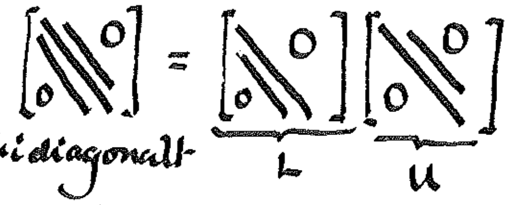
$= \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ l_{21}u_{11} & l_{21}u_{12} + u_{22} \end{bmatrix}$. Det krävs alltså (bland annat)

dels $u_{11} = 0$, dels $l_{21}u_{11} = 1$, vilket är en motsägelse.

LANA 2016 Demo 5-2

NA 5.10 Ett program löser med Gausselimination utan pivotering ett tridiagonalt ekvationssystem med 300 obekanta på 3 sekunder. Hur lång tid skulle det ta att lösa ett tridiagonalt system med 30 000 obekanta.

Lösning Skiss $A =$



Antal operationer för att utföra lösningen är, steg för steg,

LU-faktorisering: n rader, $\mathcal{O}(1)$ operationer per rad $= \mathcal{O}(n)$

Framåt-/bakåtsubstitution: n rader, $\mathcal{O}(1)$ operationer per rad $= \mathcal{O}(n)$

Totalt $\mathcal{O}(n)$ operationer.

Vi antar att tiden per operation är fix, så tiden att lösa systemet är $t(n) \approx Cn$, för någon konstant C.

Givet: $t(300) = 3 \implies C = \frac{3}{300} = \frac{1}{100}$ (sekunder/obekant).

Vi får $t(30\,000) = \frac{1}{100} \cdot 30\,000 = 300$ sekunder.

NA 5.12 Hur kan man effektivt lösa ett system på formen
$$\begin{bmatrix} L_1 & 0 \\ B & L_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b \\ c \end{bmatrix},$$ där L_1, L_2 är triangulära?

Lösning Vi skriver ut systemet som
$$\begin{cases} L_1 x = b, \\ Bx + L_2 y = c, \end{cases}$$
och ser att vi först kan lösa $L_1 x = b$ ($\mathcal{O}(n^2)$ operationer då L_1 är triangulär), beräknar sedan $d := c - Bx$ ($\mathcal{O}(n^2)$ operationer för matris-vektor multiplikation, resten går snabbare), löser till sist $L_2 y = d$ ($\mathcal{O}(n^2)$ operationer igen). Detta är mer effektivt än att LU-faktorisera hela matrisen ($\mathcal{O}(n^3)$ operationer).

LANA 2016 Demo 5-3

NA 5.16 Låt $A = \begin{bmatrix} 1 & 1+\varepsilon \\ 1+\varepsilon & 1 \end{bmatrix}$ med $A^{-1} = \frac{1}{2\varepsilon+\varepsilon^2}\begin{bmatrix} -1 & 1+\varepsilon \\ 1+\varepsilon & -1 \end{bmatrix}$, $0<|\varepsilon|\ll 1$.

Hur noggrant måste $b = (\sqrt{3}, 2)$ approximeras vid lösning av $Ax = b$ om det relativa felet i ∞-norm inte får överskrida $0.5 \cdot 10^{-4}$?

Lösning Vi har uppskattningen $\frac{\|\delta x\|_\infty}{\|x\|_\infty} \le \kappa(A)\frac{\|\delta b\|_\infty}{\|b\|_\infty}$

där $\kappa(A) = \|A\|_\infty \|A^{-1}\|_\infty$ är konditionstalet. Vi ska alltså bestämma $\|\delta b\|_\infty$ (noggrannheten) så att

$$\kappa(A)\frac{\|\delta b\|_\infty}{\|b\|_\infty} \le 0.5 \cdot 10^{-4} \implies \|\delta b\|_\infty \le 0.5\cdot 10^{-4}\frac{\|b\|_\infty}{\kappa(A)}.$$

$$\|b\|_\infty = \max_i |b_i| = 2,$$

$$\kappa(A) = \|A\|_\infty \|A^{-1}\|_\infty = (|1| + |1+\varepsilon|)\left(\frac{|-1| + |1+\varepsilon|}{|2\varepsilon+\varepsilon^2|}\right),$$

$$= \frac{(1+|1+\varepsilon|)^2}{|\varepsilon||2+\varepsilon|}$$

så

$$\|\delta b\|_\infty \le 0.5\cdot 10^{-4}\cdot 2 \cdot \frac{|\varepsilon||2+\varepsilon|}{(1+|1+\varepsilon|)^2} \approx \left\{\begin{matrix} 2+\varepsilon \approx 2 \\ 1+|1+\varepsilon| \approx 2 \end{matrix}\right\}$$

$$\approx 0.5\cdot 10^{-4}|\varepsilon|.$$

Not: Om $|\varepsilon| = 10^{-n}$ krävs alltså $n+4$ korrekta decimaler.

NA 5.18 Hur noggrant behöver π approximeras i systemet $Ax = b$ med $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1.001 & 1 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} 4 \\ \pi \end{bmatrix}$ om man vill ha ett relativt fel i ∞-norm som ej överskrider $0.5\cdot 10^{-6}$.

Lösning Som i problem NA 5.16 krävs

$$\|\delta b\|_\infty \le 0.5\cdot 10^{-6}\frac{\|b\|_\infty}{\kappa(A)}$$

med $\|b\|_\infty = 4$, $\kappa(A) = \|A\|_\infty \|A^{-1}\|_\infty$, $\|A\|_\infty = 2.001$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -1000 & 1000 \\ 1001 & -1000 \end{bmatrix}, \quad \|A\|_\infty = 2001$$

så $\|\delta b\|_\infty \le 0.5 \cdot 10^{-6}\frac{4}{2.001\cdot 2001} \approx 0.5\cdot 10^{-9}$

(nio korrekta decimaler).

LANA 2016 Demo 5-4

$\Rightarrow p_1(t)$

LA 2.1 Bestäm $\cos(v)$ där v är vinkeln mellan $3t+1$ och $5t^2+3 =: p_2(t)$ i $\mathcal{P}_2$ med skalärprodukt $\langle f, g\rangle := \int_{-1}^{1} f(t)g(t)\,dt$.

Lösning Per definition gäller $\langle p_1, p_2\rangle = \|p_1\|\,\|p_2\|\cos(v)$

$$\Rightarrow \cos(v) = \frac{\langle p_1, p_2\rangle}{\|p_1\|\,\|p_2\|}.$$

$$\langle p_1, p_2\rangle = \int_{-1}^{1}(3t+1)(5t^2+3)\,dt = \frac{28}{3}$$

$$\|p_1\| = \sqrt{\langle p_1, p_1\rangle} = \left(\int_{-1}^{1}(3t+1)^2dt\right)^{1/2} = \sqrt{8}$$

$$\|p_2\| = \sqrt{\langle p_2, p_2\rangle} = \left(\int_{-1}^{1}(5t^2+3)^2dt\right)^{1/2} = \sqrt{48}$$

$$\cos(v) = \frac{28/3}{\sqrt{8}\cdot\sqrt{48}} = \frac{7}{6\sqrt{6}}.$$

LA 2.3 För vilka a är $(a,1,1)$, $(a,1,a)$ ortogonala i $\mathbb{R}^3$ med skalärprodukt $\langle x, y\rangle = x_1y_1 + 2x_2y_2 + 3x_3y_3$.

Lösning Vi löser $0 = \langle (a,1,1), (a,1,a)\rangle = a^2 + 2 + 3a \Rightarrow a = -1, -2.$

LA 2.5 Låt $\langle f, g\rangle_1 := \int_a^b f'(t)g'(t)\,dt$, $\langle f, g\rangle_2 = \int_a^b f'(t)g'(t)\,dt + f(a)g(a)$ vara två kandidater till skalärprodukter på $C^1([a,b])$.
Är någon av dessa en skalärprodukt?

Lösning Enligt definitionen krävs

1. $\langle f, g\rangle_i = \langle g, f\rangle_i$,
2. $\langle \alpha f, g\rangle_i = \alpha\langle f, g\rangle_i$,
3. $\langle f+g, h\rangle_i = \langle f, h\rangle_i + \langle g, h\rangle_i$, och
4. $\langle f, f\rangle_i \geq 0$ ~~med~~ likhet endast då $f=0$.

De första tre egenskaperna kontrolleras lätt för både $\langle\cdot,\cdot\rangle_1$ och $\langle\cdot,\cdot\rangle_2$.
Egenskap 4 gäller ej för $\langle\cdot,\cdot\rangle_1$. Motexempel: Ta $f(t) \equiv c \neq 0$.
Vi får då $\langle f, f\rangle_1 = \int_a^b 0\cdot 0\,dt = 0$, men $f \neq 0$.

För $\langle\cdot,\cdot\rangle_2$, anta $\langle f, f\rangle_2 = 0 \Rightarrow \int_a^b f'(t)^2dt + f(a)^2 = 0$

$\Rightarrow \int_a^b f'(t)^2dt = 0$ och $f(a)^2 = 0$ (båda termerna är icke-negativa).

$\int_a^b f'(t)^2dt = 0 \Rightarrow f'(t)^2 \equiv 0$ (enda icke-negativa funktion vars integral är 0)

$\Rightarrow f(t) \equiv c$

och tillsammans med $f(a)^2 = c^2 = 0$ får vi $f \equiv 0$.

$\therefore \langle\cdot,\cdot\rangle_2$ är en skalärprodukt.

LANA 2016 Demo 5-5

LA2.8 Visa att för skalärprodukt $\langle \cdot , \cdot \rangle$ med motsvarande norm $\|\cdot\|$ gäller

$$\langle u, v\rangle = \frac{1}{4}\|u+v\|^2 - \frac{1}{4}\|u-v\|^2.$$

Lösning Vi beräknar

$$\frac{1}{4}\|u+v\|^2 - \frac{1}{4}\|u-v\|^2 = \frac{1}{4}\left(\langle u+v, u+v\rangle - \langle u-v, u-v\rangle\right)$$

$$= \frac{1}{4}\Big(\langle u,u\rangle + \langle u,v\rangle + \langle v,u\rangle + \langle v,v\rangle$$

$$- \langle u,u\rangle + \langle u,v\rangle + \langle v,u\rangle - \langle v,v\rangle\Big)$$

$$= \frac{1}{4}\left(2\langle u,v\rangle + 2\langle v,u\rangle\right) = \frac{1}{4}\left(2\langle u,v\rangle + 2\langle u,v\rangle\right) = \langle u,v\rangle.$$