LANA 2016 Demo 6-1

LA 2.17 Ange samtliga vektorer i $\mathbb{R}^4$ som är ortogonala mot både $u_1 = (1,2,1,3)$ och $u_2 = (2,5,1,4)$.

Lösning Då inget annat anges antar vi standardskalärprodukten och söker alltså $x \in \mathbb{R}^4$ sådana att

$$\begin{cases} u_1 \cdot x = 0 \\ u_2 \cdot x = 0 \end{cases} \iff \begin{bmatrix} u_1^T \\ u_2^T \end{bmatrix} x = 0 \iff \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 5 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Vi kan direkt parametrisera $x_3 = s$, $x_4 = t$:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & 5 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & s \\ 0 & 0 & 0 & 1 & t \end{array}\right] \sim \cdots \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -3s-7t \\ 0 & 1 & 0 & 0 & s+2t \\ 0 & 0 & 1 & 0 & s \\ 0 & 0 & 0 & 1 & t \end{array}\right],$$

alltså $x = s(-3,1,1,0) + t(-7,2,0,1)$.

LA 2.21 Bestäm den ortogonala projektionen av $u = (0,4,4,0)$ på $\operatorname{span}\{v_1, v_2\}$, $v_1 = (1,1,1,1)$, $v_2 = (1,-1,1,-1)$, samt ange avståndet från u till spannet.

Lösning Projektionen definieras av

$$\begin{cases} Pu \in \operatorname{span}\{v_1, v_2\}, \\ (u - Pu) \perp \operatorname{span}\{v_1, v_2\}. \end{cases} \iff \begin{cases} Pu = \alpha v_1 + \beta v_2, \\ (u-Pu)\cdot v_1 = 0, \\ (u-Pu)\cdot v_2 = 0. \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \alpha v_1\cdot v_1 + \beta v_2 \cdot v_1 = u \cdot v_1, \\ \alpha v_1 \cdot v_2 + \beta v_2 \cdot v_2 = u \cdot v_2. \end{cases} \iff \begin{bmatrix} v_1\cdot v_1 & v_2 \cdot v_1 \\ v_1 \cdot v_2 & v_2 \cdot v_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u\cdot v_1 \\ u \cdot v_2 \end{bmatrix}$$

Vi beräknar skalärprodukterna och får

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 0 \end{bmatrix} \implies \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} \implies Pu = 2v_1 = (2,2,2,2).$$

Det kortaste avståndet mellan u och $\operatorname{span}\{v_1, v_2\}$ ges av

$$\begin{aligned} \text{avstånd} &= \|u - Pu\| = \|(0,4,4,0) - (2,2,2,2)\| \\ &= \|(-2,2,2,-2)\| = \sqrt{4 \cdot 2^2} = 4. \end{aligned}$$

Not Systemet ovan kan också skrivas

$$A^T A \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = A^T u$$

där $A = [v_1 \ v_2]$. Jämför minsta-kvadratmetoden i t.ex. problem LA 2.30 nedan.

LANA 2016 Demo 6-2

LA 2.22 Beräkna avståndet mellan $u = (0,2,0,2,1)$ och $\text{span}\{\underbrace{(1,1,1,1,1)}_{=v_1}, \underbrace{(1,2,1,0,1)}_{=v_2}\}$.

Lösning Som i första uppgiften ges avståndet av $\|u - Pu\|$ där $Pu = \alpha v_1 + \beta v_2$ med α, β sådana att

$$\begin{bmatrix} v_1 \cdot v_1 & v_1 \cdot v_2 \\ v_2 \cdot v_1 & v_2 \cdot v_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u \cdot v_1 \\ u \cdot v_2 \end{bmatrix}, \text{ alltså}$$

$$\begin{bmatrix} 5 & 5 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \end{bmatrix} \implies \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \implies Pu = v_1 = (1,1,1,1,1).$$

Så avståndet är $\|u - Pu\| = \|(-1,1,-1,1,0)\| = 2$.

LA 2.30 Anpassa modell $y = A\cos(x) + B\sin(x)$ till data

x	1	2	3
y	7.9	5.4	-0.9

.

Lösning Vi ska lösa systemet

$$\begin{cases} A\cos(1) + B\sin(1) = 7.9 \\ A\cos(2) + B\sin(2) = 5.4 \\ A\cos(3) + B\sin(3) = -0.9 \end{cases}$$

på matrisform

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \cos(1) & \sin(1) \\ \cos(2) & \sin(2) \\ \cos(3) & \sin(3) \end{bmatrix}}_{=:C}\underbrace{\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}}_{=:x} = \underbrace{\begin{bmatrix} 7.9 \\ 5.4 \\ -0.9 \end{bmatrix}}_{=:b}$$

i minsta-kvadrathänseende, alltså söka vektorn b:s projektions koefficienter (A, B) på spannet av kolonnerna i C.

Detta motsvarar att lösa normalekvationerna

$$C^T C \hat{x} = C^T b.$$

Detta system är knappast lämpligt att lösa för hand.

I Matlab får vi $\hat{x} \approx \begin{bmatrix} 2.3421 \\ 7.4475 \end{bmatrix}$, så vår modell blir

$$y = 2.3421\cos(x) + 7.4475\sin(x).$$

LANA 2016 Demo 6-3

LA 2.32 Låt $\mathcal{E} = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ vara en ON-bas för V med skalärprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle$.
Definiera $\mathcal{E}' = \{e_1', e_2', e_3', e_4'\}$ enligt

$$\begin{aligned}
3e_1' &= e_1 + 2e_2 + 2e_4,\\
3e_2' &= 2e_1 - e_2 + 2e_3,\\
3e_3' &= 2e_2 + e_3 - 2e_4,\\
3e_4' &= -2e_1 + 2e_3 + e_4.
\end{aligned}$$

Visa att $\mathcal{E}'$ också är en ON-bas.

Lösning $\mathcal{E}'$ är en bas om övergångsmatrisen $T_{\mathcal{E}'\leftarrow\mathcal{E}}$ existerar, alltså om $T_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{E}'}$ som kan avläsas ovan (se övning 4, uppgift LA 1.54) är inverterbar. Vi läser av

$$T_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{E}'} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

och beräknar $T_{\mathcal{E}'\leftarrow\mathcal{E}} = T_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{E}'}^{-1} = T_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{E}'}^{T}$. Så inversen existerar (dvs. $\mathcal{E}'$ är en bas) och är transponatet av matrisen själv (dvs. matrisen är ortogonal). Det sista medför också att $\mathcal{E}'$ är ortogonal, ty, med beteckning $T_{\mathcal{E}'\leftarrow\mathcal{E}} = (t_{i,j})$ får vi

$$\begin{aligned}
\langle e_i', e_j'\rangle &= \langle \textstyle\sum_k t_{ki} e_k, \sum_\ell t_{\ell j} e_\ell\rangle \\
&= \textstyle\sum_k \sum_\ell t_{k,i} t_{\ell,j} \underbrace{\langle e_k, e_\ell\rangle}_{= \delta_{k,l} = \begin{cases} 1, & k = \ell, \\ 0, & k \neq 0, \end{cases} \text{ ty } \mathcal{E} \text{ är ON-bas}} \\
&= \textstyle\sum_k t_{k,i} t_{k,j} \\
&= (T_{\mathcal{E}'\leftarrow\mathcal{E}} T_{\mathcal{E}'\leftarrow\mathcal{E}}^{T})_{i,j} = (I)_{i,j} = \delta_{i,j}.
\end{aligned}$$

LANA 2016 Demo 6-4

LA 2.39 Bestäm $p(t) \in \mathcal{P}_2([-1,1])$ som minimerar $\int_{-1}^{1}(p(t)-t^4)^2\,dt$.

Lösning Notera att $\int_{-1}^{1}(p(t)-t^4)^2\,dt = \|p(t)-t^4\|^2$ där $\|\cdot\|$ är normen som svarar mot skalärprodukten $\langle f,g\rangle := \int_{-1}^{1} f(t)g(t)\,dt$ på $\mathcal{P}_4([-1,1])$.

Problemet är alltså att bestämma den ortogonala projektionen av t^4 på underrummet $\mathcal{P}_2([-1,1])$ i $\mathcal{P}_4([-1,1])$ med denna skalärprodukt.

Sätt alltså $p(t) = \alpha + \beta t + \gamma t^2$ och välj α, β, γ så att $\langle p(t)-t^4, t^i\rangle = 0 \iff \langle p(t), t^i\rangle = \langle t^4, t^i\rangle$, $i=0,1,2$ (eftersom t^0, t^1, t^2 är en bas för $\mathcal{P}_2([-1,1])$).

På matrisform får vi

$$\begin{bmatrix} \langle t^0,t^0\rangle & \langle t^1,t^0\rangle & \langle t^2,t^0\rangle \\ \langle t^0,t^1\rangle & \langle t^1,t^1\rangle & \langle t^2,t^1\rangle \\ \langle t^0,t^2\rangle & \langle t^1,t^2\rangle & \langle t^2,t^2\rangle \end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\langle t^4,t^0\rangle \\ \langle t^4,t^1\rangle \\ \langle t^4,t^2\rangle\end{bmatrix}$$

och då $\langle t^j, t^i\rangle = \begin{cases} \frac{2}{i+j+1}, & i+j \text{ jämnt}, \\ 0, & i+j \text{ udda}, \end{cases}$ ger detta

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{5} \end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{2}{5}\\ 0\\ \frac{2}{7}\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-3/35\\ 0\\ 6/7\end{bmatrix}$$

så $p(t) = -\frac{3}{35} + \frac{6}{7}t^2$.

Not: Matrisen ovan blir illa-konditionerad. Basen t^0, t^1, t^2 är inte bra i detta sammanhang. Bättre är att välja en ON-bas så att matrisen blir en identitetsmatris. Det finns rekursionsformler för sådana baser.

LANA 2016 Demo 6-5

LA 2.44 Bestäm tredje ordningens Fourierapproximation till $f(t) = 2\pi - t,\ 0 \le t \le 2\pi$.

Lösning Den sökte approximationen definieras som f:s projektion $\hat{f}$ på span$\{1, \sin(t), \cos(t), \sin(2t), \cos(2t), \sin(3t), \cos(3t)\}$ med avseende på skalärprodukten $\langle u, v\rangle := \int_0^{2\pi} u(t)v(t)\,dt$.

Eftersom de trigonometriska funktionerna är ortogonala i detta fall får vi följande enkla formler:

$$\hat{f}(t) = \frac{a_0}{2} + a_1\cos(t) + b_1\sin(t) + a_2\cos(2t) + b_2\sin(2t) + a_3\cos(3t) + b_3\sin(3t)$$

med $a_n = \frac{1}{\pi}\langle f, \cos(nt)\rangle$, $b_n = \frac{1}{\pi}\langle f, \sin(nt)\rangle$.

Vi beräknar

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\langle f, \cos(0t)\rangle = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}(2\pi - t)\,dt = 2\pi$$

För $n > 0$:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\langle f, \cos(nt)\rangle = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}(2\pi - t)\cos(nt)\,dt$$

$$= \underbrace{2\left[\frac{\sin(nt)}{n}\right]_0^{2\pi}}_{=0} - \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} t\cos(nt)\,dt = \text{partiell integration}$$

$$= \underbrace{-\frac{1}{\pi}\left[\frac{t\sin(nt)}{n}\right]_0^{2\pi}}_{=0} + \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\sin(nt)}{n}\,dt = \frac{1}{\pi}\left[\frac{-\cos(nt)}{n^2}\right]_0^{2\pi}$$

$$= \frac{1 - \cos(2n\pi)}{\pi n^2} = 0,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\langle f, \sin(nt)\rangle = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}(2\pi - t)\sin(nt)\,dt$$

$$= \underbrace{2\left[\frac{-\cos(nt)}{n}\right]_0^{2\pi}}_{=0} - \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} t\sin(nt)\,dt = \text{partiell integration}$$

$$= -\frac{1}{\pi}\left[\frac{-t\cos(nt)}{n}\right]_0^{2\pi} + \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{-\cos(nt)}{n}\,dt$$

$$= \frac{2}{n} + \frac{1}{\pi}\left[\frac{-\sin(nt)}{n^2}\right]_0^{2\pi} = \frac{2}{n}$$

$$\therefore\ \hat{f}(t) = \pi + 2\sin(t) + \sin(2t) + \frac{2}{3}\sin(3t).$$