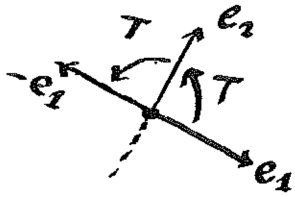
LANA 2016 Demo 7-1

LA 3.1 Låt x_1, x_2 vara koordinater med avseende på ON-bas $\mathcal{E}=\{e_1, e_2\}$ i ett plan. Bestäm matris i basen $\mathcal{E}=\{e_1, e_2\}$ för ...

(a)... rotation ett kvarts varv i positiv led (från e_1 till e_2).



Lösning Matrisen för en linjär avbildning T i bas $\mathcal{E}$ ges av $A = \left[[Te_1]_{\mathcal{E}}\ [Te_2]_{\mathcal{E}} \right]$.

Här har vi $Te_1 = e_2$, $Te_2 = -e_1$

så $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

(b)... ortogonal projektion på linjen $x_1 + x_2 = 0$.

Lösning För projektion på linje med riktningsvektor v (här $(1,-1)$) gäller

$$\left.\begin{aligned} Pu &= \alpha v \\ (u - Pu)\cdot v &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \alpha v\cdot v = v\cdot u \Rightarrow \alpha = \frac{v\cdot u}{v\cdot v}$$

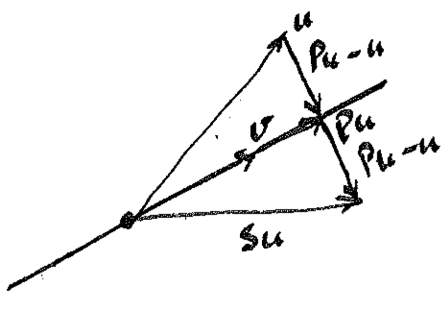
$$\text{så } Pu = \frac{v\cdot u}{v\cdot v} v = v\frac{v\cdot u}{v\cdot v} = v\frac{v^T u}{v^T v}$$

$$= \underbrace{\frac{vv^T}{v^Tv}}_{\text{detta är alltså matrisen i allmänhet}} u = \{\text{här}\} = \frac{\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}} u = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} u.$$

(c)... spegling i linjen $x_1 + x_2 = 0$.

Lösning Speglingen $Su = u + 2(Pu - u) = 2Pu - u$

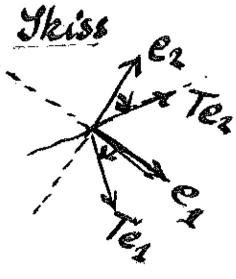
$$= 2\frac{vv^T}{v^Tv}u - u = \underbrace{\left(2\frac{vv^T}{v^Tv} - I\right)}_{\text{Här är matrisen,}} u$$



$$= \{\text{här}\} = \left(\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) u = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} u$$

(d)... rotation $\frac{\pi}{6}$ radianer i negativ led (från e_2 till e_1).

Lösning Skiss



En del "grundläggande trigonometri" ger

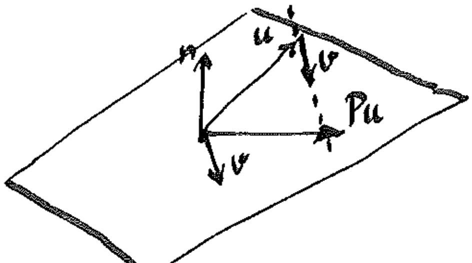
$$\left.\begin{aligned} Te_1 &= \begin{bmatrix} \cos(\frac{\pi}{6}) \\ -\sin(\frac{\pi}{6}) \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ -\sqrt{3} \end{bmatrix} \\ Te_2 &= \begin{bmatrix} \sin(\frac{\pi}{6}) \\ \cos(\frac{\pi}{6}) \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned}\right\} \Rightarrow A = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 1 \end{bmatrix}.$$

LANA 2016 Demo 7-2

LA 3.4 (a) Visa att $A = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -3 & -1 & -6 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ representerar en projektion

på ett plan genom förflyttning parallell med en linje.

Lösning Antag att planet har normal n och linjen riktning v.



Projektionen definieras av $Pu = u + \alpha v$, $Pu \perp n$, alltså

$$0 = n \cdot (u + \alpha v) = n \cdot u + \alpha n \cdot v \Rightarrow \alpha = -\frac{n \cdot u}{n \cdot v}$$

(Obs: Vi antar att v ej är ortogonal mot n, alltså att v inte är parallell med planet. Annars får vi ingen projektion)

Så

$$Pu = u - \frac{n \cdot u}{n \cdot v} v = u - v \frac{n^T u}{v^T n} = \underbrace{\left(I - \frac{v n^T}{v^T n}\right)}_{\text{Här är matrisen}} u$$

(Ett specialfall: $v = n$ ger ortogonal projektion.)

Den givna matrisen A kan skrivas på följande sätt:

$$A = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -3 & -1 & -6 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 6 \\ -1 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \frac{\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}}$$

och har alltså den önskade formen med $v = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$, $n = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

LANA 2016 Demo 7-3

LA 3.5 $F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ med $F(1,1) = (-1,1)$, $F(1,2) = (1,1)$.
Bestäm F:s matris i standardbasen.

Lösning Notera att vi vet hur F avbildar basen $\mathcal{B} = \{(1,1),(1,2)\}$.
Låt $\mathcal{E}$ vara standardbasen. I allmänhet gäller, för alla x,

$[Fx]_\mathcal{E} = A_\mathcal{E}[x]_\mathcal{E} = A_\mathcal{E} T_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{B}}[x]_\mathcal{B}$, och

$[Fx]_\mathcal{E} = T_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{B}}[Fx]_\mathcal{B} = T_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{B}} A_\mathcal{B}[x]_\mathcal{B}$

$\Rightarrow A_\mathcal{E} T_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{B}} = T_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{B}} A_\mathcal{B} \Rightarrow A_\mathcal{E} = T_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{B}} A_\mathcal{B} T_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{E}}$

(från ~~vänster~~ höger till vänster: byt till bas $\mathcal{B}$, operera i $\mathcal{B}$, byt tillbaka till bas $\mathcal{E}$).

$T_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{B}} A_\mathcal{B} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ är given (F:s verkan i $\mathcal{B}$, uttryckt i $\mathcal{E}$)

$T_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow A_\mathcal{E} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

LA 3.8 Låt $D: \mathcal{P}_n \to \mathcal{P}_n$ vara deriveringsoperatorn $Dp(t) = p'(t)$.
Bestäm matrisen för D i basen...

(a) ... $\mathcal{B} = \{1, x, \ldots, x^n\}$.

Lösning Då [illegible] $Dx^k = kx^{k-1}$, $k \geq 0$, får vi

$\left[[D(1)]_\mathcal{B} \; [D(x)]_\mathcal{B} \; \cdots \; [D(x^n)]_\mathcal{B}\right] = [0, e_1, 2e_2 \cdots ne_n]$

(I koordinatform gäller $[D(1)]_\mathcal{B} = 0$, $[Dx^k]_\mathcal{B} = ke_k$.
Notera att $[x^k]_\mathcal{B} = e_{k+1}$.)

(b) ... $\mathcal{B}' = \{1, x-c, \frac{1}{2!}(x-c)^2, \ldots, \frac{1}{n!}(x-c)^n\}$.

Lösning Här har vi $D\left(\frac{1}{k!}(x-c)^k\right) = \frac{1}{(k-1)!}(x-c)^{k-1}$,
så basvektor $e_{k+1} \to e_k$ av D, vilket ger matrisen

$[0, e_1 \; e_2 \; \cdots \; e_n]$.

LANA 2016 Demo 7 - 4

LA 3.11 Beräkna $\int (xe^x\cos(x) - 3e^x\sin(x))\,dx$ med "matrismetoden".

Lösning Idén är att bestämma hur matrisen för derivata ser ut i ett vektorrum av funktioner som väljs utifrån integranden. Den primitiva funktionen ges av den inversa avbildningen.

$$D: \quad xe^x\cos(x) \longrightarrow \underbrace{e^x\cos(x) + xe^x\cos(x) - xe^x\sin(x)}_{\text{nya typer av termer läggs till basen}}$$

$$xe^x\sin(x) \longrightarrow e^x\sin(x) + xe^x\sin(x) + xe^x\cos(x)$$

$$e^x\cos(x) \longrightarrow e^x\cos(x) - e^x\sin(x)$$

$$e^x\sin(x) \longrightarrow e^x\sin(x) + e^x\cos(x)$$

Vi väljer alltså en bas $b_1(x) = e^x\cos(x)$, $b_2(x) = e^x\sin(x)$, $b_3(x) = xe^x\cos(x)$, $b_4(x) = xe^x\sin(x)$.

Vi har $Db_1 = b_1 - b_2$, $Db_2 = b_1 + b_2$, $Db_3 = b_1 + b_3 - b_4$, $Db_4 = b_2 + b_3 + b_4$, med matris

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Koordinater för integranden är $x = (0, -3, 1, 0)$, och den primitiva funktionen har koordinater $A^{-1}x = \frac{1}{2}(3, -4, 1, 1)$

$$\Longrightarrow \int (xe^x\cos(x) - 3e^x\sin(x))\,dx = \frac{1}{2}\left(3b_1(x) - 4b_2(x) + b_3(x) + b_4(x)\right)$$
$$= \frac{1}{2}e^x\left(3\cos(x) - 4\sin(x) + x\cos(x) + x\sin(x)\right).$$

LA 3.14 Visa att om A är inverterbar och similär med B så är B inverterbar och B^{-1} similär med A^{-1}.

Lösning Om A och B är similära finns per definition en inverterbar matris S så att $B = SAS^{-1}$. SAS^{-1} är inverterbar med invers $(SAS^{-1})^{-1} = SA^{-1}S^{-1}$. Alltså existerar $B^{-1} = SA^{-1}S^{-1}$ vilket också visar att B^{-1} och A^{-1} är similära.

LA 3.16 Visa att om $A = QR$, med Q icke-singulär, så är A similär med RQ.

Lösning Enkel beräkning $A = QR = QR(QQ^{-1}) = Q(RQ)Q^{-1}$.

NA 5.20 Betrakta systemet $Ax = b$ med $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

(a) Ange minsta-kvadratlösningen $\hat{x}$.

Lösning Vi löser normalekvationerna $A^TA\hat{x} = A^Tb \Rightarrow \hat{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

(b) Ange 2-normen av den minsta residualen $r = Ax - b$.

Lösning Residualen minimeras av $\hat{x}$, så minsta möjliga är $\|A\hat{x} - b\|_2 = \|(2,1,0) - (2,1,1)\|_2 = \|(0,0,1)\|_2 = 1$.

(c) Ange en kompakt QR-faktorisering av A.

Lösning QR-faktorisering är $A = QR = [Q_1\ Q_2]\begin{bmatrix} R_1 \\ 0 \end{bmatrix} = Q_1R_1$ där Q är ortogonal, R uppåt triangulär. I Q_1 har kolonner Q_2 svarande mot nollor i R avlägsnats. Q_1R_1 är den kompakta QR-faktoriseringen.

Här gäller
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{Q} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{R} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{Q_1} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{R_1}.$$

LANA 2016 Demo 7-6

NA 5.41 Utför kompakt QR-faktorisering av

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 4 & 2 \\ 0 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix},$$ dels genom Gram-Schmidts metod, dels genom Householdertransformationer.

Lösning

Gram-Schmidt: Vi ortogonaliserar kolonnerna i A – det ger oss Q – och sparar operationerna i R. Skriv $A = [a_1 \; a_2]$.

$$q_1 := \frac{a_1}{\|a_1\|_2} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}. \quad r_{11}: \; a_1 = 5q_1 = r_{11} q_1 \Longrightarrow r_{11} = 5.$$

$$q_2' := a_2 - (a_2 \cdot q_1) q_1 = a_2 - 4q_1 = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} -5 \\ -6 \\ 15 \\ 8 \end{bmatrix}$$

$$q_2 := \frac{q_2'}{\|q_2'\|_2} = \frac{1}{\sqrt{14}} q_2', \quad r_{12}, r_{22}: \; a_2 = 4q_1 + \sqrt{14}\, q_2 = r_{12} q_1 + r_{22} q_2$$

$$\Longrightarrow r_{12} = 4, \; r_{22} = \sqrt{14}.$$

$$\therefore \; A = Q_1 R_1 = \begin{bmatrix} 0 & -1/\sqrt{14} \\ 4/5 & -6/5\sqrt{14} \\ 0 & 3/\sqrt{14} \\ 3/5 & 8/5\sqrt{14} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 0 & \sqrt{14} \end{bmatrix}.$$

Not: Denna metod kan förefalla enklare, men blir numeriskt instabil.

Householder: Vi bestämmer speglingar som transformerar A till R, produkten av speglingarna ger Q.

$$v_1' := a_1 - \|a_1\|_2 e_1 = \begin{bmatrix} -5 \\ 4 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad v_1 := \frac{v_1'}{\|v_1'\|_2} = \frac{1}{5\sqrt{2}}\begin{bmatrix} -5 \\ 4 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix},$$

$H_1 := I - 2v_1 v_1^T$ (speglar i plan med normal v_1, dvs. $a_1 \longrightarrow \|a_1\|_2 v_1$).

$$= \frac{1}{25}\begin{bmatrix} 0 & 20 & 0 & 15 \\ 20 & 9 & 0 & -12 \\ 0 & 0 & 25 & 0 \\ 15 & -12 & 0 & 16 \end{bmatrix}. \quad H_1 A = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 0 & -2 \\ 0 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Sätt $\hat{a}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ (andra kolonn i $H_1 A$, utan första element, för att lämna förstakomponenter intakta).

$$v_2' = \hat{a}_2 - \|\hat{a}_2\|_2 e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -2-\sqrt{14} \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$v_2 = \frac{v_2'}{\|v_2'\|_2} = \frac{1}{\sqrt{2(14+2\sqrt{14})}}\begin{bmatrix} 0 \\ -2-\sqrt{14} \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

$$\cancel{H_2 = I - 2v_2 v_2^T = \frac{1}{14+2\sqrt{14}} \begin{bmatrix} 14+2\sqrt{14} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4-2\sqrt{14} & 6+3\sqrt{14} & 2+\sqrt{14} \end{bmatrix}}$$

$$H_2 = I - 2v_2 v_2^T = \frac{1}{14+2\sqrt{14}}\begin{bmatrix} 14+2\sqrt{14} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4-2\sqrt{14} & 6+3\sqrt{14} & 2+\sqrt{14} \\ 0 & 6+3\sqrt{14} & 5+2\sqrt{14} & -3 \\ 0 & 2+\sqrt{14} & -3 & 13+2\sqrt{14} \end{bmatrix}$$

$$R = H_2 H_1 A = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 0 & -\sqrt{14} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad Q = H_1 H_2 = \begin{bmatrix} 0 & -1/\sqrt{14} & * & * \\ 4/5 & -6/5\sqrt{14} & * & * \\ 0 & 3/\sqrt{14} & * & * \\ 3/5 & 8/5\sqrt{14} & * & * \end{bmatrix}$$

Element inom streckade rutor utesluts i kompakt QR-faktorisering.