LANA 2016 Demo 8-1

LA 4.2 Bestäm bas för egenrummet till de givna matriserna, svarande mot angivna egenvärden.

(a) $A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\lambda = 1, 2, 3$.

Lösning Vi drar oss till minnes att ett egenvärde λ till en matris är ett (komplext) tal sådant att $Ax = \lambda x$ för något $x \neq 0$, kallat egenvektor.

Motsvarande egenrum är $\{x : Ax = \lambda x\}$, dvs. mängden av alla egenvektorer svarande mot λ. Vi kan bestämma det som $\{x : Ax = \lambda x\} = N(A - \lambda I)$.

Vi kan beräkna $N(A-I) = \text{span}\{(0,1,0)\}$, $N(A-2I) = \text{span}\{(-1,2,2)\}$, $N(A-3I) = \text{span}\{(-1,1,1)\}$.

(c) $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$, $\lambda = 4$.

Lösning $N(A - 4I) = \text{span}\{(2,3,1,0), (0,0,0,1)\}$

LA 4.4 (c) Bestäm alla egenvärden och egenvektorer till $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

Lösning Egenvärden beräknas som rötter till det karakteristiska polynomet $\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ -4 & 4-\lambda & 0 \\ -2 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(4-\lambda)(2-\lambda) + 4(2-\lambda)$

$= (2-\lambda)^3$ med rötterna $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 2$.

Egenvektorerna bestäms som tidigare som $N(A - \lambda I) = N(A-2I)$
$= \text{span}\{(1,-2,0), (0,0,1)\}$.

Not Egenvärdets algebraiska multiplicitet är $m_a(\lambda) :=$ ~~dess~~ multiplicitet som rot till $\det(A-\lambda I)$, dess geometriska multiplicitet är $m_g(\lambda) := \dim N(A-\lambda I)$. För egenvärdet $\lambda = 2$ ovan är alltså $m_a(\lambda) = 3 > m_g(\lambda) = 2$. Det gäller alltid att $m_a(\lambda) \geq m_g(\lambda) \geq 1$. När $m_a(\lambda) > m_g(\lambda)$, som här, kallas egenvärdet defekt.

LA4.8 Låt T vara en linjär avbildning med två egenvektorer u_1, u_2, svarande mot egenvärden $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Visa att $\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2$ inte är en egenvektor till T då $\alpha_1, \alpha_2 \neq 0$.

Lösning Vi beräknar $T(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2) = \alpha_1 T(u_1) + \alpha_2 T(u_2)$
$= \alpha_1 \lambda_1 u_1 + \alpha_2 \lambda_2 u_2$ och då $\lambda_1 \neq \lambda_2$ och $\alpha_1, \alpha_2 \neq 0$ är detta inte en multipel av $\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2$, därmed inte en egenvektor. (Obs! $u_1, u_2 \neq 0$ då nollvektorn per definition inte är en egenvektor.)

LA4.12 Låt $T: \mathcal{P}_2 \longrightarrow \mathcal{P}_2$ definieras av $T(p)(t) = tp'(t+1) + p(t)$.

(a) Visa att T är linjär.

Lösning Ta $p, q \in \mathcal{P}_2$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Vi får

$$T(\alpha p + \beta q)(t) = t(\alpha p + \beta q)'(t+1) + (\alpha p + \beta q)(t)$$
$$= t\alpha p'(t+1) + t\beta q'(t+1) + \alpha p(t) + \beta q(t)$$
$$= \alpha\left(tp'(t+1) + p(t)\right) + \beta\left(tq'(t+1) + q(t)\right) = \alpha T(p)(t) + \beta T(q)(t).$$

(b) Bestäm matrisen för T i basen $\{1, t, t^2\}$.

Lösning T: $1 \longmapsto t \cdot 0 + 1 = 1$ (i koordinater $(1,0,0) \longmapsto (1,0,0)$)
$t \longmapsto t \cdot 1 + t = 2t$ (i koordinater $(0,1,0) \longmapsto (0,2,0)$)
$t^2 \longmapsto t \cdot 2(t+1) + t^2 = 2t + 3t^2$ (i koordinater $(0,0,1) \longmapsto (0,2,3)$)

Så matrisen är $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = A$.

(c) Ange egenvärden och egenvektorer till T.

Lösning Vi får egenvärden och -vektorer till T via A.
A är triangulär, därmed kan egenvärden avläsas på diagonalen som $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 3$.

Motsvarande egenvektorer till A fås som
$N(A - I) = \text{span}\{(1,0,0)\}$ motsvarande $\text{span}\{1\}$ för T,
$N(A - 2I) = \text{span}\{(0,1,0)\}$ motsvarande $\text{span}\{t\}$ för T,
$N(A - 3I) = \text{span}\{(0,2,1)\}$ motsvarande $\text{span}\{2t + t^2\}$ för T.

LANA 2016 Demo 8-3

LA4.16 Avgör om den givna matrisen är diagonaliserbar, och diagonalisera om möjligt.

(a) $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 2 & -4 & 3 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$.

Lösning A är diagonaliserbar om inget egenvärde är defekt. Ett egenvärde λ är defekt om $m_a(\lambda) > m_g(\lambda)$ där $m_a(\lambda)$ är multipliciteten hos λ som rot till $\det(A-\lambda I)$ och $m_g(\lambda) = \dim N(A-\lambda I)$ (m_a är algebraisk och m_g geometrisk multiplicitet).

Om A är diagonaliserbar gäller $A = TDT^{-1}$ där T har A:s egenvektorer som kolonner och D är diagonal med A:s egenvärden på diagonalen.

Här beräknar vi egenvärden $\det(A-\lambda I) = 0 \implies \lambda = -2, -1, 1$ (alltså $m_a(\lambda) = 1 \ \forall \lambda \implies$ A är diagonaliserbar då $m_a(\lambda) \geq m_g(\lambda) \geq 1$).

$N(A-(-2)I) = \text{span}\{(1,1,1)\}$, $N(A-(-1)I) = \text{span}\{(0,1,1)\}$, $N(A-I) = \text{span}\{(1,1,0)\}$, så

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1}.$$

(b) $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{bmatrix}$.

Lösning Vi beräknar $\det(A-\lambda I) = 0 \Rightarrow \lambda = -1, -1, 3$ ($m_a(-1) = 2 > 1 \implies -1$ kan vara defekt...)

$N(A-(-1)I) = \text{span}\{(1,2,1)\} \implies m_g(-1) = 1 < m_a(-1)$, så -1 är ett defekt egenvärde och A är inte diagonaliserbar.

LANA 2016 Demo 8-4

LA4.19 Låt A vara en kvadratisk matris med konstant kolonn- ~~rad~~summa k ($=1$, men det saknar betydelse). Visa att k är ett egenvärde till A.

Lösning Vi observerar att, för en matris $B = (b_{i,j})$ gäller

$$B\mathbb{1} = \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n,1} & \cdots & b_{n,n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11} + \cdots + b_{1,n} \\ \vdots \\ b_{n,1} + \cdots + b_{n,n} \end{bmatrix}$$

så om B har radsumma r är $B\mathbb{1} = r\mathbb{1}$, och r är ett egenvärde till B.

Matrisen A^T har konstant radsumma k och därmed är k ett egenvärde till A^T, därmed också till A eftersom A^T och A har samma egenvärden.

LA4.25 A är symmetrisk och kan faktoriseras $A = B^TB$ där B är inverterbar. Visa att alla A:s egenvärden är positiva.

Lösning Låt λ vara ett egenvärde och x motsvarande egenvektor (observera att $x \neq 0$). Vi får

$$\lambda x = Ax = B^TBx \implies x^T(\lambda x) = x^TB^TBx$$

$$\implies \lambda x^Tx = (Bx)^T(Bx) \implies \lambda = \frac{(Bx)^T(Bx)}{x^Tx} = \frac{\|Bx\|_2^2}{\|x\|_2^2}$$

och då B är inverterbar och $x \neq 0$ är $Bx \neq 0$ så $\|Bx\|_2 > 0$. Alltså $\lambda = \dfrac{\|Bx\|_2^2}{\|x\|_2^2} > 0$.

LA4.28(a) Diagonalisera $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \end{bmatrix}$ ortogonalt.

Lösning Diagonaliseringen går till som i LA4.16, men eftersom A är symmetrisk ($A^T = A$) blir matrisen T i $A = TDT^{-1}$ ortogonal (efter rätt normering), alltså $T^{-1} = T^T$.

$\det(A - \lambda I) = 0 \implies \lambda = -12, 0, 6$. $N(A-(-12)I) = \operatorname{span}\{(0,1,-1)\}$, $N(A - 0I) = \operatorname{span}\{(1,1,1)\}$, $N(A-6I) = \operatorname{span}\{(2,-1,-1)\}$, så

$$A = TDT^{-1} = TDT^T \text{ med } D = \begin{bmatrix} -12 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}, \quad T = \begin{bmatrix} 0 & 1/\sqrt{3} & 2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{6} \end{bmatrix}.$$

(Observera normeringen av T:s kolonner.)