LANA 2016 Demo 9-1

LA4.33 Vektorerna $x^{(n)} = (x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, x_3^{(n)})$ definieras av

$$x^{(0)} := (3,2,1), \quad x^{(n+1)} = Ax^{(n)}, n>0, \quad A = \begin{bmatrix} 1 & -4 & -3 \\ -3 & 2 & 3 \\ -4 & -4 & 2 \end{bmatrix}.$$

Bestäm $\lim_{n\to\infty} x_2^{(n)} \cdot 5^{-n}$.

Lösning Vi observerar att $x^{(n)} = A^n x^{(0)}$. Om A är diagonaliserbar med $A = TDT^{-1}$ får vi $A^n = (TDT^{-1})^n = (TDT^{-1})(TDT^{-1})\cdots(TDT^{-1})$ $= TD^nT^{-1}$ (där D^n kan beräknas lätt eftersom D är diagonal).

Vi diagonaliserar A som tidigare och får

$$D = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}, \quad T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \text{och } T^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$x^{(n)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5^n & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & (-2)^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot 5^n + \begin{bmatrix} -4 \\ 4 \\ -4 \end{bmatrix} \cdot 2^n + \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix} \cdot (-2)^n$$

och $\lim_{n\to\infty} 5^{-n} x_2^{(n)} = \lim_{n\to\infty} (-2 + 4 \cdot 2^n \cdot 5^{-n}) = -2.$

LA4.38 Diagonalisera de kvadratiska formerna ortogonalt!

(a) $q(x) := 6x_1^2 + 5x_2^2 + 7x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3$.

Lösning En kvadratisk form kan alltid skrivas på formen $q(x) = x^TAx$ för en symmetrisk matris A. Här får vi $A = \begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 7 \end{bmatrix}$. ~~Att~~ diagonalisera q motsvarar att ~~diagonalisera~~ $A = TDT^T$ (ortogonalt) och göra variabelbytet $y = T^Tx$. Vi får då $x^TAx = x^TTDT^Tx = (T^Tx)^TD(T^Tx)$ $= y^TDy$, så q är ortogonal i basen T.

Här får vi $D = \begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$, $T = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix}$ och $q(y) = 9y_1^2 + 6y_2^2 + 3y_3^2$ i basen av T:s kolonner.

LANA 2016 Demo 9-2

LA 4.39 (a) Vilket är det största respektive minsta värde som
$q(x) = 3x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 2x_2x_3$ kan
anta då $\|x\|_2^2 = 1$?

Lösning För $q(x) = x^TAx$, kan man visa att $\lambda_{min}\|x\|_2^2 \leq q(x) \leq \lambda_{max}\|x\|_2^2$
A symmetrisk
där λ_{min} och λ_{max} är minsta respektive största egenvärdet
till A, och man får likhet då x är parallell med motsvarande
egenvektorer. Här får vi

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$ med egenvärden 4, 4, och -2

så $\max\limits_{\|x\|_2^2=1} q(x) = 4$, $\min\limits_{\|x\|_2^2=1} q(x) = -2$.

LA 4.46 Låt $q(x) := 7x_1^2 + 3x_2^2 + 3x_1x_2$.

(a) Bestäm det största värdet q antar då $\|x\|_2^2 = 1$.

Lösning Vi diagonaliserar $q(x) = x^TAx$, $A = \begin{bmatrix} 7 & 3/2 \\ 3/2 & 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{10}\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 15/2 & 0 \\ 0 & 5/2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$
och som tidigare får vi $\max\limits_{\|x\|_2^2=1} q(x) = \frac{15}{2}$.

(b) Finn en vektor u som maximerar q med $\|u\|_2^2 = 1$.

Lösning Som ovan: Vi får maximum för motsvarande egenvektor,
alltså $u = \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$.

(c) Om $\|x\|_2^2 = 1$ och $u^Tx = 0$, vad blir största möjliga värde
för $q(x)$?

Lösning För $x^TAx = y^TDy = \lambda_1 y_1^2 + \dots + \lambda_n y_n^2$ {anta $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$},
motsvarar kriteriet $u^Tx = 0$, där u maximerar, $y_1 = 0$ så

$$\max_{\substack{\|x\|_2^2=1 \\ u^Tx=0}} q(x) = \lambda_2 = \{\text{här}\} = \frac{5}{2}.$$

LANA 2016 Demo 9-3

LA 4.41 Vilka av de kvadratiska formerna är positivt definita på $\mathbb{R}^3$?

$Q_1(x) := x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_3 - 4x_2x_3$,

$Q_2(x) := x_1^2 + 2x_2^2 + 9x_3^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3 - 2x_1x_3$,

$Q_3(x) := x_1^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3 - 6x_2x_3$.

Lösning En kvadratisk form $Q(x) = x^T A x$ (A symmetrisk) sägs vara positivt definit om $Q(x) > 0$ då $x \neq 0$, vilket gäller om och endast om alla egenvärden till A är positiva (eftersom $Q(x) \geq \lambda_{min} \|x\|_2^2$).

Vi kan alltså antingen ge ett motexempel ($x \neq 0$ så att $Q(x) \leq 0$) eller bevisa att Q är positivt definit genom att beräkna egenvärdena till A (eller i alla fall visa att de är positiva).

Q_1: $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \\ -1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$. $Q_1((0,1,1)) = 2 - 4 = -2 < 0$

$\Longrightarrow$ ej positivt definit.

Q_2: $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & 9 \end{bmatrix}$ har karakteristiskt polynom

$f(\lambda) = \det(A - \lambda I) = -\lambda^3 + 12\lambda^2 - 23\lambda + 4$ (vilket saknar enkelt-beräknade rötter)

Vi behöver bara visa att $f(\lambda) \neq 0$, $\lambda \leq 0$.

$f'(\lambda) = -3\lambda^2 + 24\lambda - 23$ har rötter $4 \pm \frac{5}{\sqrt{3}} > 0$

och $f'(\lambda) < 0$ då $\lambda \leq 0$. Eftersom $f(0) = 4 > 0$ och $f(\lambda)$ är avtagande för $\lambda \leq 0$ kan f inte ha några rötter $\lambda < 0$.

$\Longrightarrow$ Q_2 är positivt definit.

Q_3: $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -3 \\ -2 & -3 & 0 \end{bmatrix}$. $Q_3((1,1,1)) = 1 + 2 - 4 - 6 = -7 < 0$

$\Longrightarrow$ ej positivt definit

LANA 2016 Demo 9-4

LA 4.48 $x(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t))$ definieras av $x'(t) = Ax(t)$, $x(0) = x_0$ med $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$, $x_0 = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$. Beräkna $\lim_{t\to\infty} x_1(t)e^{-3t}$.

Lösning Vi generaliserar lösningsgången för skalära ordinära differentialekvationer genom matrisexponentialfunktionen

$$e^{tA} = I + \frac{(-tA)}{1} + \dots + \frac{(-tA)^n}{n!} + \dots$$

med $\frac{d}{dt} e^{-tA} = -Ae^{-tA} = -e^{-tA}A$.

Betrakta systemet $x'(t) - Ax(t) = f(t)$, $x(0) = x_0$.

Vi multiplicerar med matrisen e^{-tA} från vänster

$$e^{-tA}x'(t) - e^{-tA}Ax(t) = e^{-tA}f(t)$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(e^{-tA}x(t)\right) = e^{-tA}f(t)$$

$$\Rightarrow \int_0^t \frac{d}{ds}(e^{-sA}x(s))\,ds = \int_0^t e^{-sA}f(s)\,ds$$

$$\Rightarrow e^{-tA}x(t) - \underbrace{e^{-0\cdot A}}_{=I}\underbrace{x(0)}_{=x_0} = \int_0^t e^{-sA}f(s)\,ds$$

$$\Rightarrow x(t) = e^{tA}x_0 + \int_0^t e^{-(s-t)A}f(s)\,ds$$

och när vi har $f(t) \equiv 0$ får vi $x(t) = e^{tA}x_0$.

e^{tA} kan beräknas genom diagonalisering (om möjligt) av A:

$$e^{tA} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(tA)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \underbrace{(TDT^{-1})\dots(TDT^{-1})}_{n \text{ faktorer}}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} TD^nT^{-1} = T\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(tD)^n}{n!}\right)T^{-1}$$

$$= Te^{tD}T^{-1} \quad \text{med} \quad e^{tD} = \begin{bmatrix} e^{t\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{t\lambda_m} \end{bmatrix} \text{ då } D \in \mathbb{R}^{m\times m}.$$

I detta problem får vi $D = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$, $T = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 4 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

$T^{-1} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 3 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & -3 \\ 2 & 2 & -6 \end{bmatrix}$ vilket ger $x(t) = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} e^{3t} + \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ -1 \end{bmatrix} e^{t} + \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 5 \\ 5 \\ 5 \end{bmatrix} e^{-2t}$

så $\lim_{t\to\infty} x_1(t)e^{-3t} = \lim_{t\to\infty}\left(2 + \frac{1}{3}e^{-2t} + \frac{5}{3}e^{-5t}\right) = 2$.