MATEMATISKA VETENSKAPER
Chalmers tekniska högskola
Examinator: Geir Bogfjellmo Tel: 0725-796742

TMA671 2017
2017–10–07 kl 08:30-12:30
Hjälpmedel: Inga

TMA671 Linjär Algebra och Numerisk Analys

Tentamen

Renskriv dina lösningar, lämna ej in kladdpapper! Poängavdrag ges för dåligt motiverade, svårtolkade eller svårläsliga lösningar.

Tentan består av 7 uppgifter.

Maximalt antal poäng är 60, och betygsgränserna är 30 för 3 (godkänd), 42 för 4 och 54 för 5. Upp till 10 bonuspoäng från bonusuppgifter får tillgodoräknas.

Lycka till!

Geir

1. Låt A vara matrisen **(8 p)**

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

(a) Bestäm för vilka $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^2$ ekvationen $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ har lösning. (2 p)

(b) Låt nu A vara en godtycklig reell $n \times m$-matris, och anta att ekvationen

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

har lösning för alla $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$.
Visa att ekvationen $A^\top \mathbf{y} = 0$ endast har den triviella lösningen $\mathbf{y} = 0$ (4 p)

(c) Matrisen från (b) har kompakt singulärvärdesdekomposition $A = U\Sigma V^\top$. Vad är dimensionerna till U, Σ och V? (2 p)

2. Vi betraktar en funktion $F \colon P_2 \to P_2$ där **(10 p)**

$$F(p)(t) = (t-1)p'(t) + p(t)$$

för alla t. ($F(p)(t)$ är polynomen $F(p)$, evaluerad i t.)

(a) Visa att F är en linjär avbildning. (3 p)

I P_2 använder vi standardbasen $\{q_1, q_2, q_3\}$, där

$$q_1(t) = 1, \qquad q_2(t) = t, \qquad q_3(t) = t^2,$$

(b) Beräkna matrisen för F i standardbasen. (3 p)

(c) Bestäm alla par (λ, p), där $\lambda \in \mathbb{R}$ och $p \in P_2$ som uppfyller (4 p)

$$F(p) = \lambda p$$

3. I den här uppgiften kan du använda att **(10 p)**

$$\int_0^\infty t^n e^{-t} \mathrm{d}t = n! \qquad \text{För } n = 0, 1, 2, \ldots$$

(a) Visa att

$$\langle p, q \rangle = \int_0^\infty p(t)q(t)e^{-t}\mathrm{d}t$$

är ett skalärprodukt på rummet av polynom P. (4 p)

(b) Beräkna en ortonormerad (i skalärproduktet från a) bas för rummet av polynom av grad högst ettP_1. (3 p)

(c) Beräkna det förstagradspolynom p som minimerar (3 p)

$$\int_0^\infty (p(t) - t^2)^2 e^{-t} \mathrm{d}t.$$

4. Antag att A är en symmetrisk reell $n \times n$ matris så att $A^2 = A$. **(10 p)**

(a) Visa att A inte kan ha andra egenvärden än 0 och 1. (3 p)

(b) Låt $r = \operatorname{rank} A > 0$. Visa att det finns en $n \times r$-matris Q så att Q har ortonormala kolumner och (3 p)

$$A = QQ^\top.$$

(c) Visa att avbildningen

$$F(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$$

är en ortogonal projektion på ett underrum $U \subset \mathbb{R}^n$. (4 p)

5. En CPU i en dator räknar flyttalsoperationer med addition, subtraktion och multiplikation på samma sätt som vi räknar på papper. (Fast i binära tal.) För divisionen $\frac{1}{d}$ använder några CPUer Newtons metod tillämpad på ekvationen $\frac{1}{x} - d = 0$. **(8 p)**

(a) Skriv upp iterationsformeln för Newtons metod tillämpad på ekvationen $\frac{1}{x} - d = 0$. Ditt svar ska inte innehålla division. (3 p)

(b) Visa att för det relative felet

$$\frac{\delta x_n}{x^*} = \frac{x_n - x^*}{x^*}$$

gäller (3 p)

$$\frac{\delta x_{n+1}}{x^*} = -\left[\frac{\delta x_n}{x^*}\right]^2$$

Newtons metod måste kombineras med något startvärde x_0, och antal interationer som behövs beror på hur nära startvärdet är den faktiska lösningen och hur stor precision som önskas i slutresultatet.

(c) Vi önskar att $\frac{1}{d}$ ska beräknas med relativt fel mindra än 10^{-16} till belopp i fyra iterationer. Hur noggrann måste startapproximationen x_0 vara? (2 p)

6. I QR-algoritmen beräknas egenvärden till en matris A_0 genom att successivt beräkna **(8 p)**

$$\begin{aligned} Q_n R_n &= A_n \qquad \text{(full QR-faktorisering)} \\ A_{n+1} &= R_n Q_n \end{aligned}$$

för $n = 0, 1, 2, \ldots$

(a) Visa att A_n har samma egenvärden som A_0. (3 p)

(b) Det upplysas att om metoden konvergerar, så vill $Q_n \to I$. Forklara hur du kan estimera A_0's egenvärden från A_n. (3 p)

(c) Antag att A_0 är reell, men har komplexa egenvärden. Förklara varför QR-algoritmen inte kan konvergera i det här fallet. (2 p)

7. Enligt en modell utvecklar populationerna av harar (x) och rävar (y) på en ö sig enligt en differentialekvation: **(6 p)**

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 2x - xy$$
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2}xy - y$$

Där x och y representerar antal tusen individer. (Den här modellen kallas Lotka–Volterra modellen).

(a) Låt startpopulationerna vara $x(0) = 1$ och $y(0) = 4$ och använd ett steg med Euler framåt för att beräkna en approximasjon av $x(0.25), y(0.25)$. (3 p)

(b) Euler framåt fungerar tyvärr inte särskild bra på den här ekvationen. Förklara vilket problem som kan uppstå om vi använder Euler framåt med för lång steglängd. (Hint: När är modellen meningsfull?). (3 p)