MATEMATISKA VETENSKAPER
Chalmers tekniska högskola
Examinator: Geir Bogfjellmo Tel: 0725-796742

TMA671 2017
2017–08–19 kl 08:30-12:30
Hjälpmedel: Inga

TMA671 Linjär Algebra och Numerisk Analys

Tentamen

Renskriv dina lösningar, lämna ej in kladdpapper! Poängavdrag ges för dåligt motiverade, svårtolkade eller svårläsliga lösningar.

Tentan består av 9 uppgifter.

Maximalt antal poäng är 60, och betygsgränserna är 30 för 3 (godkänd), 42 för 4 och 54 för 5. Upp till 10 bonuspoäng från bonusuppgifter får tillgodoräknas.

Lycka till!

Geir

1. Vi betraktar funktionen $F\colon P_2 \to \mathbb{R}^2$ (där P_2 är rummet av polynom av grad högst 2) given av **(10 p)**

$$F(p) = \begin{bmatrix} p(1) \\ p(2) \end{bmatrix}.$$

(a) Visa att F är en linjär avbildning. (3 p)

I P_2 använder vi basen $\{q_1, q_2, q_3\}$, där

$$q_1(t) = 1, \qquad q_2(t) = t, \qquad q_3(t) = t^2,$$

och i $\mathbb{R}^2$ använder vi standardbasen.

(b) Beräkna matrisen för F i de uppgivna baserna. (3 p)

(c) Bestäm nollrummet till F, $N(F) \subseteq P_2$. (2 p)

Funktionen $G\colon P_2 \to \mathbb{R}^3$ är given av

$$G(p) = \begin{bmatrix} p(0) \\ p(1) \\ p(2) \end{bmatrix}$$

(d) Bestäm en bas för P_2 så att matrisen för G i den basen och standardbasen för $\mathbb{R}^3$ är nedåt triangulär. (2 p)
Hint: Tänk interpolationspolynom.

2. Låt **(10 p)**

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \text{och} \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

(a) Lös minsta kvadrat-problemet (3 p)

$$\min_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^2} \|A\mathbf{x} - \mathbf{b}\|.$$

Låt B vara en $n \times m$-matris med där $n \geq m$ och anta att $B = QR$, där Q är en $n \times m$-matris med ortonormala kolumner, och R en uppåt triangulär $m \times m$-matris utan nollor på diagonalen. Låt vidare $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$.

(b) Visa att de två ekvationssystemen

$$B^\top B\mathbf{x} = B^\top \mathbf{c},$$
$$R\mathbf{x} = Q^\top \mathbf{c}$$

er ekvivalenta (har samma lösning). (4 p)

(c) Visa att den gemensamma lösningen till de två ekvationssystemen är lösning till minsta kvadrat-problemet (3 p)

$$\min_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^m} \|B\mathbf{x} - \mathbf{c}\|.$$

3. Är **(4 p)**

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = x_1 y_1 - x_2 y_2$$

ett skalärprodukt på $\mathbb{R}^2$? Varför/varför inte?

4. Låt **(5 p)**

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}.$$

(a) Bestäm As egenvärden och egenvektorer. (2 p)

(b) Lös begynnelsesvärdeproblemet (3 p)

$$\begin{cases} \mathbf{y}'(t) &= A\mathbf{y}(t), \\ \mathbf{y}(0) &= \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}. \end{cases}$$

5. Låt A vara en reell $n \times n$ matris. Anta A har endast ett egenvärde λ och at det finns n linjärt oberoende egenvektorer tillhörande detta egenvärdet. **(6 p)**

(a) Visa att $A = \lambda I$. (3 p)

Låt B vara en symmetrisk reell $n \times n$ matris så att $B^2 = 2B$.

(b) Visa att antingen är $B = 2I$, annars så är B singulär (ej inverterbar). (3 p)

6. Kvadraturformeln Simpsons regel på intervallet $[-1, 1]$ definieras genom att sätta **(9 p)**

$$Q(f) = \int_{-1}^{1} p_2(x)\,\mathrm{d}x$$

där p_2 är andragradspolynomet som interpolerar f i punkterna -1,0 och 1.

(a) Härled Simpsons regel på intervallet $[-1, 1]$ på formen (3 p)

$$Q(f) = w_1 f(-1) + w_2 f(0) + w_3 f(1).$$

(b) Visa att Simpsons regel ger korrekt svar för alla polynom av grad högst 3, men inte för polynom av grad 4. (2 p)

Anta att $Q(f) = \sum_{i=1}^{n} w_i f(x_i)$ är en kvadraturformel på intervallet $[-1, 1]$ som bygger på polynominterpolation på delintervall.

(c) Visa att $\sum_{i=1}^{n} w_i = 2$. (2 p)

(d) Anta att f endast kan beräknas med absoluttfel $|\delta f(x)| = |\hat{f}(x) - f(x)| \leq \Delta$, och att $w_i \geq 0$ för alla i.
Visa att för det fortplantade felet $\delta Q(f) = Q(\hat{f}) - Q(f)$ gäller (2 p)

$$|\delta Q(f)| \leq 2\Delta.$$

7. Vi löser ekvationen $f(x) = \sin x + x - \frac{\pi}{2} = 0$ med Newtons metod. **(6 p)**

(a) Visa att ekvationen har exakt en reell lösning x^*, och att den finns i intervallet $(0, \frac{\pi}{2})$. (2 p)

(b) Sätt upp iterationsformeln för Newtons metod tillämpad på ekvationen, och utför ett steg från initialvärdet $x_0 = 0$. (2 p)

(c) Visa att för $x_k \in (0, \frac{\pi}{2})$ gäller felgränsen (2 p)

$$|x_k - = x^*| \leq |f(x_k)|.$$

8. Vi studerar ett system av differentialekvationer **(5 p)**

$$\begin{cases} y'(t) = v(t), \\ v'(t) = -y(t). \end{cases}$$

(Differentialekvationerna beskriver till exempel en harmonisk oscillator.)

(a) Skriv upp iterationsformlerna för Eulers framåtmetod och Eulers bakåtmetod tillämpad på systemet. (3 p)

(b) Utför ett steg med Eulers bakåtmetod där du använder steglängd $h = \frac{1}{2}$ och initialvärderna (2 p)

$$y(0) = 1, \qquad v(0) = 0.$$

9. Vi studerar ett optimeringsproblem **(5 p)**

$$\min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} f(\mathbf{x}),$$

där

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\mathbf{x}^\top A\mathbf{x} - \mathbf{b}^\top \mathbf{x},$$

och A är positiv definitt $n \times n$-matris, och $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$.

(a) Beskriv alla descentriktninger i ett punkt $\mathbf{x}$. (2 p)

(b) Härled formeln för optimal lösning av linjesökingsproblemet $\min_\alpha f(x_k + \alpha s_k)$, (3 p)

$$\alpha_k = -\frac{\nabla f(x_k)^\top s_k}{s_k^\top A s_k}$$