MATEMATISKA VETENSKAPER
Chalmers tekniska högskola
Telefonvakt: Carl Lundholm, ankn 5325
Hjälpmedel: inga

TMA671 2018
Datum: 2018-08-25 kl. 08.30–12.30
Examinator: Håkon Hoel

TMA 671 Linjär Algebra och Numerisk Analys

Tentan består av 7 uppgifter, med varierande antal deluppgifter.
Maximalt antal poäng är 60, och betygsgränserna är 30 för 3 (godkänd), 42 för 4 och 54 för 5. Upp till 10 bonuspoäng från bonusuppgifter får tillgodoräknas.
Renskriv dina lösningar, lämna ej in kladdpapper! Poängavdrag ges för dåligt motiverade, svårtolkade eller svårläsliga lösningar.

Tentan rättas och bedöms anonymt. Resultat meddelas via Ladok ca. tre veckor efter tentamenstillfället.

---

1. Låt

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

a) Bestäm rangen av A. **(2p)**

b) SVD-faktorisering av matrisen A kan skrivas på formen **(4p)**

$$A = U\Sigma V^T. \qquad (1)$$

Bestäm matrisen Σ och beskriv viktiga egenskaper hos U och V (matriserna U och V behöver inte bestämmas).

c) Låt A_1 beteckna den trunkerade SVD-approximationen av A med rang 1. Beräkna $\|A - A_1\|_2$. **(2p)**

d) Låt $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^4$ och betrakta det överbestämta ekvationssystemet **(4p)**

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}.$$

Beskriv Moorse-Penroses pseudoinvers till A, som vi betecknar A^+, och demonstrera att $\boldsymbol{x}^+ := A^+\boldsymbol{b}$ är en minstakvadratlösning till problemet ovan.

2. Låt A vara en $n \times n$-matris som uppfyller matrisekvationen $2A^2 + A = 3I$.

a) Visa att A är inverterbar. **(1p)**

b) Beskriv mängden av möjliga egenvärden till A. **(2p)**

c) Antag att $\|A\|_2 = 3/2$. Skatta konditionstalet till A i 2-normen, dvs $\kappa_2(A)$. **(2p)**

d) Låt $\boldsymbol{x}, \hat{\boldsymbol{x}} \in \mathbb{R}^n$ beteckna lösningarna till respektive ekvationer **(3p)**

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \quad \text{och} \quad A\hat{\boldsymbol{x}} = \hat{\boldsymbol{b}},$$

där $\boldsymbol{b}, \hat{\boldsymbol{b}} \in \mathbb{R}^n$ med $\|\boldsymbol{b}\|_2 = 1$ och $\|\hat{\boldsymbol{b}} - \boldsymbol{b}\|_2 = 0.1$. Beskriv hur konditionstalet $\kappa_2(A)$ kan användas till att uppåt begränsa relativfelet

$$\frac{\|\boldsymbol{x} - \hat{\boldsymbol{x}}\|_2}{\|\boldsymbol{x}\|_2}.$$

VÄND!

3. a) Bevisa följande resultat: För en godtycklig matris $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ gäller att **(4p)**

$$N(A^T) = V(A)^{\perp}.$$

b) Bestäm en ortonormerad bas för $V(A)^{\perp}$ där **(4p)**

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 4 & 6 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}.$$

4. a) Visa att om $f \in C^3[0,1]$, så gäller följande **(2p)**

$$\frac{-(4/3)f(0) + (3/2)f(h) - (1/6)f(3h)}{h} = f'(0) + \mathcal{O}(h^2)$$

b) Låt $f \in C^3[0,1]$ vara en funktion som går genom följande punkter **(5p)**

x	$1/4$	$1/2$	1
$f(x)$	$1/16$	$1/4$	1

,

och som uppfyller

$$\max_{x \in [0,1]} |f^{(3)}(x)| = 2.$$

Approximera $f'(1/2)$ så noggrant som möjligt med en finita differensapproximation och skatta approximationsfelet.

5. a) Definiera begreppet underrum. **(1p)**

b) Ge ett exempel på underrum V_1, V_2 av $\mathbb{R}^3$ sådana att $V_1 \cup V_2$ inte är ett underrum. **(2p)**

c) Låt **(4p)**

$$U_1 = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \middle| \, x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R} \right\} \quad \text{och} \quad U_2 = \left\{ x \in \mathbb{R}^5 \,\middle|\, \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} x = 0 \right\}.$$

Beskriv mängden och dimensionen till $U_1 + U_2$. Är $U_1 + U_2$ en direkt summa? (Som alltid, motivera svaret.)

VÄND!

6. Låt $f(x) = (1 + x^2)^{-1/2}$.

a) Approximera integralen **(2p)**

$$I = \int_0^1 f(x)dx$$

med trapetsformeln med steglängd $h = 1/2$. (Det räcker att skriva svaret som approximationsmetodens summa.)

b) Låt $T(n^{-1})$ beteckna trapetsformelns approximation av integralen I med steglängd $h = 1/n$ där $n \in \mathbb{N}$. Bestäm ett $\bar{n} \in \mathbb{N}$ sådant att **(2p)**

$$|T(n^{-1}) - I| \leq 10^{-10} \quad \text{för alla naturliga tal} \quad n \geq \bar{n}.$$

Det uppges att följande likhet håller för alla $n \geq 1$:

$$T(n^{-1}) - I = \frac{1}{12n^2} f''(\xi_n)$$

där $\xi_n \in [0, 1]$.

c) Visa att **(2p)**

$$T(n^{-1}) < I \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

d) Visa att **(3p)**

$$I < \sqrt{\frac{\pi}{4}}.$$

7. a) Lös följande ordinära differentialekvation med diagonaliseringsmetoden: **(5p)**

$$\left.\begin{aligned} x_1'(t) &= -x_1(t) + x_2(t) \\ x_2'(t) &= x_1(t) - 2x_2(t) + x_3(t) \\ x_3'(t) &= x_2(t) - x_3(t) \end{aligned}\right\} \quad t > 0,$$

med begynnelsevillkoren $x_1(0) = 2$, $x_2(0) = -1$ och $x_3(0) = 1$.

b) Använd Euler bakåtmetoden med steglängd $h = 1$ till att numerisk lösa differentialekvationen ovan en iteration framöver. **(4p)**

SLUT