MATEMATISKA VETENSKAPER
Chalmers tekniska högskola
Examinator: Geir Bogfjellmo Tel: 0725-796742

TMA671 2017
2017–05–29 kl 14:00-18:00
Hjälpmedel: Inga

TMA671 Linjär Algebra och Numerisk Analys

Tentamen

Renskriv dina lösningar, lämna ej in kladdpapper! Poängavdrag ges för dåligt motiverade, svårtolkade eller svårläsliga lösningar.

Tentan består av 8 uppgifter, med varierande antal deluppgifter.

Maximalt antal poäng är 60, och betygsgränserna är 30 för 3 (godkänd), 42 för 4 och 54 för 5. Upp till 10 bonuspoäng från bonusuppgifter får tillgodoräknas.

Lycka till!

Geir

1. Vi studerar ett ekvationssystem $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ där $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ är inverterbar. **(9 p)**

(a) Beskriva LU-faktoriseringen (med eller utan pivotering) av A, och förklara hur du kan använda den till att lösa ekvationssystemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. (4 p)

(b) Låt $\hat{\mathbf{b}} = \mathbf{b} + \delta\mathbf{b}$ vara en approximation till $\mathbf{b}$ och $\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{x} + \delta\mathbf{x}$ lösningen till ekvationen $A\hat{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{b}}$. Härled felgränsen (3 p)

$$\frac{\|\delta\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} \leq \|A\| \left\|A^{-1}\right\| \frac{\|\delta\mathbf{b}\|}{\|\mathbf{b}\|},$$

där $\|\cdot\|$ betecknar någon vektornorm och tillhörande matrisnorm.

(c) Låt $A = U\Sigma V^\top$ vara singulärvärdesfaktoriseringen av A. Hur kan du beräkna As konditionstal i 2-normen, $\kappa_2(A) = \|A\|_2 \left\|A^{-1}\right\|_2$ från U, Σ och V? (2 p)

2. Antag att $A \in \mathbb{R}^{n\times k}$ och $B \in \mathbb{R}^{k\times m}$ uppfyllar att $AB = 0_{n\times m}$. Låt $r = \mathrm{Rank}(A)$ och $s = \mathrm{Rank}(B)$ och **(9 p)**

(a) Visa att $V(B) \subseteq N(A)$. (3 p)

(b) Ange dimensionen till rummet $N(A) \cap V(B)^\perp \subset \mathbb{R}^k$. (2 p)
(Ortogonalt komplement tas med avseende på standardskalärproduktet.)

(c) Antag att du har en rutin `null` som tar in en matris C och returnerar en matris D, vars kolonner är en bas för $N(C)$. Förklara hur du kan använda `null` till att beräkna en bas för $N(A) \cap V(B)^\perp$. (4 p)

3. Låt $U \subset \mathbb{R}^3$ vara rummet uppspänd av vektorerna **(6 p)**

$$\left\{ \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}.$$

(a) Bestämma en bas för $U^\perp$. (3 p)
(Ortogonalt komplement tas med avseende på standardskalärproduktet.)

(b) Låt $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Beräkna den vektor $\mathbf{w} \in U$ som minimerar avståndet till $\mathbf{b}$. (3 p)

4. **(6 p)**

(a) Visa att (3 p)

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^{1} f'(t)g'(t)\mathrm{d}t + f(0)g(0)$$

är et skalärprodukt på funktionsrummet $C^1[-1,1]$, (kontinuerligt deriverbara funktioner)

(b) Bestäm en ortogonalbas, (med avseende på skalärproduktet i (a)) för $\mathcal{P}_3$ = rummet av polygoner av grad högst 3. (3 p)

5. **(10 p)**

(a) Bestäm egenvärder och egenvektorer till matrisen (3 p)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$$

(b) Lös begynnelsesvärdesproblemet (3 p)

$$\begin{cases} \mathbf{y}'(t) = A\mathbf{y}(t) \\ \mathbf{y}(0) = \begin{bmatrix} 1 & -2 \end{bmatrix}^\top \end{cases}$$

(c) Lös även det störda begynnelsesvärdesproblemet (2 p)

$$\begin{cases} \mathbf{z}'(t) = A\mathbf{z}(t) \\ \mathbf{z}(0) = \begin{bmatrix} 1+\varepsilon & -2 \end{bmatrix}^\top \end{cases}$$

Där $\varepsilon \neq 0$. Vad är $\lim_{t\to\infty} \|z(t) - y(t)\|$?

(d) Är begynnelsesvärdesproblemet i (a) stabilt? Varför / varför inte? (2 p)

6. Vi använder centraldifferens för att approximera andraderivata av en funktion $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. **(8 p)**

$$f''(x) \approx \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2}$$

(a) Visa att om f är C^4 och $|f^{(4)}(y)| \leq M_4$ för alla $y \in [x-1, x+1]$, gäller följande felgräns för trunkeringsfelet R_T (3 p)

$$|R_T| = \left| \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} - f''(x) \right| \leq \frac{M_4 h^2}{24}$$

för $h < 1$.

(b) Antag vi inte beräknar f exakt, men använder en approximation $\hat{f}$ med absolut felgräns

$$|\hat{f}(y) - f(y)| \leq \mu$$

för alla $y \in [x-1, x+1]$. Visa följande felgräns för det medförde felet i centraldifferensen (3 p)

$$|R_f| \leq \frac{4\mu}{h^2}$$

för $h < 1$.

(c) Beräkna den h som minimerar summan av de två felgränserna. (2 p)

7. Vi betraktar en enstegsmetod för lösning av autonoma ordinära differentialekvationer. **(7 p)**

$$\begin{aligned} z_k &= y_k + \frac{h}{3} f(z_k) \\ y_{k+1} &= y_k - \frac{h}{2} f(y_k) + \frac{3h}{2} f(z_k) \end{aligned}$$

(a) Använd metoden på testproblemet

$$\begin{cases} y'(t) &= \lambda y(t), \\ y(0) &= 1, \end{cases}$$

och ta fram metodens stabilitetsfunktion (tillväxtfaktor) $R(h\lambda)$ (2 p)

(b) Definera en metods stabilitetsområde ut från stabilitetsfunktionen $R(z)$. (1 p)

(c) Visa att metoden tillämpad på testproblemet har lokalt trunkeringsfel på formen (2 p)

$$L_{k+1} = c_1 h^4 y_k + \ldots$$

Vi tillämpar även metoden på den ordinära differentialekvationen

$$\begin{cases} y'(t) &= y(t)^2 \\ y(0) &= y_0 \end{cases}$$

(d) Vis, genom att Taylorutveckla $y(t_0+h)$, z_0 och y_1 som funktioner av h, att metoden tillämpad på den här ekvationen har lokalt trunkeringsfel på formen (2 p)

$$L_1 = c_2 h^3 y_0^4 + \dots$$

Hint: Lösa inte ekvationen för z_0, men ta derivata av ekvationen

$$z_0 = y_1 + \frac{h}{3} z_0^2$$

med avseende på h.

8. I den här uppgiften studerar vi ett tvådimensionellt optimeringsproblem. **(5 p)**

$$\min_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^2} f(\mathbf{x})$$

där

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}x_2^2 - x_1 + \frac{1}{4}x_1^2(x_1+x_2)^2$$

(a) Beräkna $\nabla f(\mathbf{x})$. (2 p)

(b) Gör två iterationssteg med steepest descent med startpunkt $\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}^\top$, och exakt lösning av linjesökningsproblemet. (3 p)