MATEMATISKA VETENSKAPER | **TMA671 2018**
Chalmers tekniska högskola | **Datum: 2018-10-13 kl. 08.30–12.30**
Examinator: Håkon Hoel | **Tel: ankn 5325, Maximilian Thaller**
Hjälpmedel: inga

TMA 671 Linjär Algebra och Numerisk Analys

Tentan består av 6 uppgifter, med varierande antal deluppgifter.
Maximalt antal poäng är 60, och betygsgränserna är 30 för 3 (godkänd), 42 för 4 och 54 för 5. Upp till 10 bonuspoäng från bonusuppgifter får tillgodoräknas.
Renskriv dina lösningar, lämna ej in kladdpapper! Poängavdrag ges för dåligt motiverade, svårtolkade eller svårläsliga lösningar.

Tentan rättas och bedöms anonymt. Resultat meddelas via Ladok ca. tre veckor efter tentamenstillfället.

---

1. a) Visa att följande likhet gäller för alla $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$: **(3p)**

$$\|A\|_2 = \|A^T\|_2.$$

b) Visa att för en positiv definit matris $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ (dvs symmetrisk matris med strikt positiva egenvärden) så är $\det(A) > 1$ endast om **(3p)**

$$\sum_{i=1}^{n} A_{ii} > n.$$

Det uppges att om $x_1, x_2, \ldots, x_k \geq 0$ och $k \in \mathbb{N}$, så gäller följande olikhet

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_k}{k} \geq (x_1 x_2 \cdots x_k)^{1/k}.$$

c) Låt A vara en inverterbar matris med egenvärden $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$. Bestäm egenvärdena till matrisen **(3p)**

$$B = 2A^3 + I - 3A^{-1}.$$

2. Vi betraktar följande ickelinjära ekvationssytem (som kan relateras till GPS triangulering)

$$\begin{aligned} (x-1)^2 + y^2 &= 1 \\ (x-3)^2 + (y-2)^2 &= 9. \end{aligned} \tag{1}$$

a) Bestäm analytiskt de två lösningarna till ekvationssystem (1). **(2p)**

b) Skriv om ekvationssystem (1) så att det kan lösas med Newtons metod. Gör två iterationer med Newtons metod med startgissningen $\boldsymbol{x}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. **(3p)**

c) Antag att den erhållna följden från Newtons metod konvergerar mot gränsen $\lim_{k\to\infty} \boldsymbol{x}_k = \overline{\boldsymbol{x}}$. Beskriv hur man experimentellt kan skatta approximationsfelet $\|\boldsymbol{x}_k - \overline{\boldsymbol{x}}\|_2$ i fall där man inte känner exakta lösningen $\overline{\boldsymbol{x}}$ och skatta approximationsfelet $\|\boldsymbol{x}_2 - \overline{\boldsymbol{x}}\|_2$ experimellt (dvs skatta felet utan att använda värdet $\overline{\boldsymbol{x}}$). **(2p)**

d) Betrakta följande modifierade form av (1) med bivillkor och störning i högerledet: **(3p)**

$$\left.\begin{aligned} (x-1)^2 + y^2 &= 1 + \delta, \\ (x-3)^2 + (y-2)^2 &= 9 + \delta, \\ \text{med bivillkoret} \quad y &> 0. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Vi anser parametern $\delta \in (-1, 1)$ som en störning av indata (när $\delta \neq 0$). Avgör om problem (2) är stabilt.

VÄND!

3. I denna uppgiften studerar vi linjära avbildningar.

a) Låt U och V vara reella linjära rum. Beskriv egenskaperna till en linjär avbildning $F : U \to V$. **(1p)**

b) Låt $\mathcal{P}$ beteckna reella linjära rummet av alla polynom. Bestäm om följande avbildningar på $\mathcal{P}$ är linjära: **(2p)**

$$F_1(p)(t) = 2p''(t) + 3p'(t) + p(0)$$
$$F_2(p)(t) = (p(t) - 1)^2 - (p(t) + 1)^2 + p(t - 1)$$

c) Låt $\mathcal{P}_2$ beteckna reella linjära rummet av polynom av grad högst 2 och betrakta följande två basor för $\mathcal{P}_2$: **(2p)**

$$\mathcal{E} = \{1, t, t^2\} \quad \text{och} \quad \mathcal{B} = \{1 + t, 1 + 2t, t^2 + 2t - 1\}.$$

För godtyckligt polynom $p(t) = c_1 + c_2 t + c_3 t^2 \in \mathcal{P}_2$ betecknar $[p]_{\mathcal{E}} = \boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^3$ där $\boldsymbol{c} = (c_1, c_2, c_3)^T$ är koordinaterna till p i basen $\mathcal{E}$. På samma sätt låter vi $[p]_{\mathcal{B}} = \boldsymbol{d} \in \mathbb{R}^3$ beteckna koordinaterna till p i basen $\mathcal{B}$. Bestäm (den entydiga) matrisen $T \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ sådan att följande likhet gäller för alla $p \in \mathcal{P}_2$:

$$[p]_{\mathcal{E}} = T[p]_{\mathcal{B}}.$$

d) Låt $F : \mathcal{P}_2 \to \mathcal{P}_2$ vara en linjär avbildning vars matris i basen $\mathcal{B}$ är lika med **(4p)**

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 2 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Bestäm matrisen till linjära avbildningen $G(p) = F(p' + 2p)$ i basen $\mathcal{E}$.

4. a) Definiera begreppet affint rum. **(1p)**

b) Antag att $v_1, \ldots, v_k$, $k \geq 1$ är linjärt oberoende vektorer i det reella linjära rummet V. Visa att **(3p)**

$$M = \left\{ \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_k v_k \,\middle|\, \lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R} \quad \text{och} \quad \sum_{j=1}^{k} \lambda_j = 1 \right\}$$

är ett affint rum.

c) Låt U och V vara två ändligdimensionella rella vektorrum med $\dim U = m, \quad \dim V = n$ och $n < m/2$. Låt $F : U \to V$ och $G : U \to V$ vara linjära avbildningar och betrakta ekvationssystemet

$$\begin{aligned} F(x) &= b_1 \\ G(x) &= b_2, \end{aligned} \tag{3}$$

där $b_1 \in V(F)$ och $b_2 \in V(G)$ ($V(F)$ och $V(G)$ betecknar värderummen till respektive avbildningar). Låt $x_p \in U$ vara en partikulärlösning till ekvationssystem (3) (klargörande: vi antar alltså att ekvationssystemet har minst en lösning).

Bevisa följande två resultat:

(i) $x \in U$ är en lösning till ekvationssystem (3) om och endast om $x = x_p + x_h$ där $x_h \in N(F) \cap N(G)$. ($N(F)$ och $N(G)$ betecknar nollrummen till respektive avbildningar.) **(3p)**

(ii) Ekvationssystem (3) har ett oändligt antal lösningar. **(4p)**

VÄND!

5. Vi studerar minimeringsproblemet

$$\min_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3} f(\boldsymbol{x}), \quad \text{där} \quad f(\boldsymbol{x}) = (x_3^2 - 1)^2 + (x_1^2 - x_2)^2 + (2 - x_1)^2 + 2x_1\,.$$

a) Beräkna $\nabla f(\boldsymbol{x})$. **(1p)**

b) Bestäm alla kritiska punkter till f analytiskt. Visa att funktionen minst har två lokala minima. **(4p)**

c) Definiera begreppet descentrikning $\boldsymbol{s}$ i $\boldsymbol{x}$ (för funktionen f ovan) och bestäm vilka av följande sökriktningar **(3p)**

$$\boldsymbol{s}_1 = \begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix} \quad \text{och} \quad \boldsymbol{s}_2 = \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} \quad \text{som är descentriktningar i} \quad \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix}2\\1\\0\end{bmatrix}.$$

d) Beräkna ett iterationssteg med steepest descentmetoden med exakt lösning av linjesökningsproblemet och startgissning $\boldsymbol{x}_0 = \begin{bmatrix}-1\\2\\1\end{bmatrix}$. **(3p)**

6. Vi betraktar följande andra ordningens ordinära differentialekvation (ODE)

$$x''(t) = -V'(x(t)), \qquad t \geq 0 \tag{4}$$

där $V \in C^\infty(\mathbb{R})$ är en potentialfunktion och vi har begynnelsevillkoren $x(0) = 1$ och $x'(0) = 0$.

a) Visa att ekvationen ovan kan skrivas om till följande första ordningens ekvationssytem **(2p)**

$$\left.\begin{aligned} x_1'(t) &= x_2(t) \\ x_2'(t) &= -V'(x_1(t)) \end{aligned}\right\}, \qquad t \geq 0 \tag{5}$$

med $x_1(0) = 1$ och $x_2(0) = 0$.

b) Antag att ODEen (5) har en entydig och kontinuerlig deriverbar lösning $\boldsymbol{x}(t) = \begin{bmatrix}x_1(t)\\x_2(t)\end{bmatrix}$ för alla tider $t \geq 0$ och betrakta Hamiltonianen $H(t) := V(x_1(t)) + \frac{1}{2}(x_2(t))^2$. Visa att Hamiltonianen bevaras. Dvs, visa att $H(t) = H(0)$ för alla $t \geq 0$. **(2p)**

c) Betrakta ODEen (5) med potentialfunktionen $V(x) = \frac{1}{2}x^2$ (som kallas den harmoniska oscillatorn), dvs den linjära ODEen **(3p)**

$$\left.\begin{aligned} x_1'(t) &= x_2(t) \\ x_2'(t) &= -x_1(t) \end{aligned}\right\} \qquad t \geq 0, \tag{6}$$

och låt $\boldsymbol{x}$ och $\boldsymbol{x}_\delta$ beteckna entydiga lösningarna till (6) för respektive begynnelsevillkor

$$\boldsymbol{x}(0) = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} \quad \text{och} \quad \boldsymbol{x}_\delta(0) = \begin{bmatrix}1\\\delta\end{bmatrix}, \quad \text{för någon} \quad \delta > 0.$$

Visa att

$$\|\boldsymbol{x}(t) - \boldsymbol{x}_\delta(t)\|_2 \leq \delta \quad \forall t \geq 0.$$

d) Gör en iteration med steglängd $h = 1/2$ med trapetsmetoden för att lösa ODEen (6) med begynnelsevillkoren $\boldsymbol{x}_0 = (1, 0)^T$. Bevarar den numeriska lösning Hamiltonianen? **(3p)**

SLUT