MATEMATISKA VETENSKAPER **TMA671 2018**
Chalmers tekniska högskola **Datum: 2018-08-25 kl. 08.30–12.30**
Telefonvakt: Carl Lundholm, ankn 5325 **Examinator: Håkon Hoel**
Hjälpmedel: inga

TMA 671 Linjär Algebra och Numerisk Analys

Tentan består av 7 uppgifter, med varierande antal deluppgifter.
Maximalt antal poäng är 60, och betygsgränserna är 30 för 3 (godkänd), 42 för 4 och 54 för 5. Upp till 10 bonuspoäng från bonusuppgifter får tillgodoräknas.
Renskriv dina lösningar, lämna ej in kladdpapper! Poängavdrag ges för dåligt motiverade, svårtolkade eller svårläsliga lösningar.

Tentan rättas och bedöms anonymt. Resultat meddelas via Ladok ca. tre veckor efter tentamenstillfället.

---

1. Låt

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

a) Bestäm rangen av A. **(2p)**

b) SVD-faktorisering av matrisen A kan skrivas på formen **(4p)**

$$A = U\Sigma V^T. \tag{1}$$

Bestäm matrisen Σ och beskriv viktiga egenskaper hos U och V (matriserna U och V behöver inte bestämmas).

c) Låt A_1 beteckna den trunkerade SVD-approximationen av A med rang 1. Beräkna $\|A - A_1\|_2$. **(2p)**

d) Låt $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^4$ och betrakta det överbestämta ekvationssystemet **(4p)**

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}.$$

Beskriv Moorse-Penroses pseudoinvers till A, som vi betecknar A^+, och demonstrera att $\boldsymbol{x}^+ := A^+\boldsymbol{b}$ är en minstakvadratlösning till problemet ovan.

Lösningsförslag:

a) Låt $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ betekna matrisens kolonner. Observera att

$$x_1\boldsymbol{a}_1 + x_2\boldsymbol{a}_2 + x_3\boldsymbol{a}_3 = 0 \implies \begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 &= 0 \\ x_1 - x_3 &= 0 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 + x_2 &= 0 \end{aligned} \implies \begin{aligned} x_1 &= x_3 \\ x_2 &= -x_3 \\ 2x_3 &= 0 \end{aligned} \implies x_1 = x_2 = x_3 = 0,$$

vilket implicerar att kolonnerna är linjärt oberoende. Konklusion: $\text{rang}(A) = \dim(V(A)) = 3$.

b) Matriserna $U \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ och $V \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ är ortogonala matriser, och

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

där singulära värdena till A, $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3 \geq 0$, är lika med roten ur motsvarande egenvärden till

$$A^T A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 4 \\ 0 & 4 & 6 \end{bmatrix}.$$

Dvs, $\sigma_1 = \sqrt{10}$, $\sigma_2 = 2$ och $\sigma_3 = \sqrt{2}$.

c) Sedan U och V är ortogonala matriser är

$$\|A - A_1\|_2 = \left\| U \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} V^T \right\|_2 = \left\| \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right\|_2 = \sigma_2 = 2.$$

d) Sedan $\mathrm{rang}(A) = 3$ fås kompakt SVD-faktorisering av A genom

$$A = U\Sigma V^T = [U_1 \; U_2] \begin{bmatrix} \Sigma_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} V^T = U_1 \Sigma_1 V^T$$

där $U_1 = [\boldsymbol{u}_1 \, \boldsymbol{u}_2 \, \boldsymbol{u}_3] \in \mathbb{R}^{4\times 3}$ och

$$\Sigma_1 = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix}.$$

Pseudoinversen är definierad som $A^+ = V\Sigma_1^{-1}U_1^T$.

Vid att använda att U är ortogonal får vi att

$$\|A\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}\|_2^2 = \|U(\Sigma V^T\boldsymbol{x} - U^T\boldsymbol{b})\|_2^2 = \left\| \begin{bmatrix} \Sigma_1 V^T \boldsymbol{x} - U_1^T\boldsymbol{b} \\ U_2^T\boldsymbol{b} \end{bmatrix} \right\|_2^2 = \|\Sigma_1 V^T\boldsymbol{x} - U_1^T\boldsymbol{b}\|_2^2 + \|U_2^T\boldsymbol{b}\|_2^2.$$

vilket implicerar att

$$\|A\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}\|_2^2 \geq \|U_2^T\boldsymbol{b}\|_2^2 \qquad \forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3.$$

Och

$$\|\Sigma_1 V^T\boldsymbol{x}^+ - U_1^T\boldsymbol{b}\|_2^2 = 0 \implies \|A\boldsymbol{x}^+ - \boldsymbol{b}\|_2 = \|U_2^T\boldsymbol{b}\|_2^2,$$

som betyder att $\boldsymbol{x}^+$ minimerar kvadratfelet.

$\blacksquare$

2. Låt A vara en $n \times n$-matris som uppfyller matrisekvationen $2A^2 + A = 3I$.

a) Visa att A är inverterbar. **(1p)**

b) Beskriv mängden av möjliga egenvärden till A. **(2p)**

c) Antag att $\|A\|_2 = 3/2$. Skatta konditionstalet till A i 2-normen, dvs $\kappa_2(A)$. **(2p)**

d) Låt $\boldsymbol{x}, \hat{\boldsymbol{x}} \in \mathbb{R}^n$ beteckna lösningarna till respektive ekvationer **(3p)**

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \quad \text{och} \quad A\hat{\boldsymbol{x}} = \hat{\boldsymbol{b}},$$

där $\boldsymbol{b}, \hat{\boldsymbol{b}} \in \mathbb{R}^n$ med $\|\boldsymbol{b}\|_2 = 1$ och $\|\hat{\boldsymbol{b}} - \boldsymbol{b}\|_2 = 0.1$. Beskriv hur konditionstalet $\kappa_2(A)$ kan användas till att uppåt begränsa relativfelet

$$\frac{\|\boldsymbol{x} - \hat{\boldsymbol{x}}\|_2}{\|\boldsymbol{x}\|_2}.$$

Lösningsförslag:

a)

$$\det(2A^2 + A) = 3^n \det(I) \implies \det(A)\det(2A + I) = 3^n \neq 0 \implies \det(A) \neq 0.$$

b) Om $(\lambda, \boldsymbol{v})$ är ett egenpar till A så gäller att

$$(2A^2 + A - 3I)\boldsymbol{v} = 0 \implies (2\lambda^2 + \lambda - 3)\boldsymbol{v} = 0 \implies (2\lambda^2 + \lambda - 3) = 0 \implies \lambda \in \{-3/2, 1\}.$$

c) Matrisekvationen ger oss inversen till A:

$$2A^2 + A = 3I \implies A\frac{(2A+I)}{3} = I \implies A^{-1} = \frac{2A+I}{3}.$$

Och

$$\kappa_2(A) = \|A\|_2\|A^{-1}\|_2 = \frac{1}{3}\|A\|_2\|2A+I\|_2 \leq \frac{2\|A\|_2^2 + \|A\|_2}{3} = 2.$$

d) Sedan

$$\frac{\|\boldsymbol{x} - \hat{\boldsymbol{x}}\|_2}{\|\boldsymbol{x}\|_2}\frac{\|\boldsymbol{b}\|_2}{\|\boldsymbol{b} - \hat{\boldsymbol{b}}\|_2} = \frac{\|A^{-1}(\boldsymbol{b} - \hat{\boldsymbol{b}})\|_2\|A\boldsymbol{x}\|_2}{\|\boldsymbol{x}\|_2\|\boldsymbol{b} - \hat{\boldsymbol{b}}\|_2} \leq \frac{\|A^{-1}\|_2\|\boldsymbol{b} - \hat{\boldsymbol{b}}\|_2\|A\|_2\|\boldsymbol{x}\|_2}{\|\boldsymbol{x}\|_2\|\boldsymbol{b} - \hat{\boldsymbol{b}}\|_2} = \kappa_2(A),$$

följer det att

$$\frac{\|\boldsymbol{x} - \hat{\boldsymbol{x}}\|_2}{\|\boldsymbol{x}\|_2} \leq \kappa_2(A)\frac{\|\boldsymbol{b} - \hat{\boldsymbol{b}}\|_2}{\|\boldsymbol{b}\|_2} = \frac{\kappa_2(A)}{10}.$$

■

3. a) Bevisa följande resultat: För en godtycklig matris $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ gäller att **(4p)**

$$N(A^T) = V(A)^{\perp}.$$

b) Bestäm en ortonormerad bas för $V(A)^{\perp}$ där **(4p)**

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 4 & 6 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}.$$

Lösningsförslag:

a) Låt oss skriva $A = [\boldsymbol{a}_1\ \boldsymbol{a}_2 \ldots \boldsymbol{a}_n]$.

$$\begin{aligned} N(A^T) &= \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^m \mid A^T\boldsymbol{x} = 0\} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^m \mid \boldsymbol{a}_k \cdot \boldsymbol{x} = 0 \quad \text{för alla } k = 1, 2, \ldots, n\} \\ &= \operatorname{Span}(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n)^{\perp} = V(A)^{\perp}. \end{aligned}$$

b) Låt oss börja med att beskriva $N(A^T)$ vid att utföra elementära radoperationer på A^T

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 6 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} = B.$$

Sedan elementära radoperationer bevarar lösningsmängden gäller att

$$A^T\boldsymbol{x} = 0 \iff B\boldsymbol{x} = 0 \implies N(A^T) = \operatorname{Span}\left(\begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right).$$

En ON-bas $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ för $V(A)^{\perp}$:

$$\boldsymbol{e}_1 = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{u}_2 = \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \left(\begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \boldsymbol{e}_1\right)\boldsymbol{e}_1 = \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{2}{3}\begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -5 \\ 4 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

och

$$
\boldsymbol{e}_2 = \frac{\boldsymbol{u}_2}{\|\boldsymbol{u}_2\|_2} = \frac{1}{\sqrt{54}} \begin{bmatrix} -5 \\ 4 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}.
$$

■

4. a) Visa att om $f \in C^3[0,1]$, så gäller följande **(2p)**

$$
\frac{-(4/3)f(0) + (3/2)f(h) - (1/6)f(3h)}{h} = f'(0) + \mathcal{O}(h^2)
$$

b) Låt $f \in C^3[0,1]$ vara en funktion som går genom följande punkter **(5p)**

x	$1/4$	$1/2$	1
$f(x)$	$1/16$	$1/4$	1

,

och som uppfyller

$$
\max_{x\in[0,1]} |f^{(3)}(x)| = 2.
$$

Approximera $f'(1/2)$ så noggrant som möjligt med en finita differensapproximation och skatta approximationsfelet.

Lösningsförslag:

a) Taylorutveckling kring $x = 0$ ger

$$
\frac{-(4/3)f(0) + (3/2)(f(0) + f'(0)h + f''(0)h^2/2) - (1/6)(f(0) + f'(0)(3h) + f''(0)(3h)^2/2) + \mathcal{O}(h^3)}{h}
$$
$$
= \frac{(-(4/3) + (3/2) - 1/6)f(0) + ((3/2) - (3/6))f'(0)h + ((3/4) - 9/12)f''(0)h^2}{h} + \mathcal{O}(h^2)
$$
$$
= f'(0) + \mathcal{O}(h^2).
$$

b) Taylorutveckling kring $x = 1/2$ (med $h = -1/4$) ger

$$
f(1/4) = f(1/2) - f'(1/2)\frac{1}{4} + f''(1/2)\frac{(1/4)^2}{2} - f^{(3)}(\theta_1)\frac{(1/4)^3}{6}, \quad \theta_1 \in [1/4, 1/2]
$$

och

$$
f(1) = f(1/2) + f'(1/2)\frac{1}{2} + f''(1/2)\frac{(1/2)^2}{2} + f^{(3)}(\theta_2)\frac{(1/2)^3}{6} \quad \theta_2 \in [1/2, 1].
$$

Som i uppgift a) önskar vi bestämma koefficienter $c_1, c_2, c_3 > 0$ sådana att

$$
\frac{c_1 f(1/4) + c_2 f(1/2) + c_3 f(1)}{1/4} = f'(1/2) + \mathcal{O}((1/4)^2).
$$

Det leder till ekvationerna

$$
\begin{aligned}
c_1 + c_2 + c_3 &= 0 \\
-c_1 + 2c_3 &= 1 \\
c_1 + 4c_3 &= 0
\end{aligned}
$$

Gaussisk elimering ger

$$
\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 4 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1/6 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -2/3 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1/6 \end{array}\right].
$$

Konklusion:

$$f'(1/2) \approx \frac{(-2/3)f(1/4) + (1/2)f(1/2) + (1/6)f(1)}{1/4} = 1$$

och från Taylorutvecklingarna ovan kan man härleda att

$$\left|\frac{(-8/3)f(1/4) + 2f(1/2) + (2/3)f(1)}{1/4} - f'(1/2)\right| \leq \frac{4(4^{-3} + 2^{-3})}{6} \max_{x\in[0,1]} |f^{(3)}(x)| = \frac{3}{16}.$$

$\blacksquare$

5. a) Definiera begreppet underrum. **(1p)**

b) Ge ett exempel på underrum V_1, V_2 av $\mathbb{R}^3$ sådana att $V_1 \cup V_2$ inte är ett underrum. **(2p)**

c) Låt **(4p)**

$$U_1 = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \middle| \; x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R} \right\} \quad \text{och} \quad U_2 = \left\{ x \in \mathbb{R}^5 \middle| \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} x = 0 \right\}.$$

Beskriv mängden och dimensionen till $U_1 + U_2$. Är $U_1 + U_2$ en direkt summa? (Som alltid, motivera svaret.)

Lösningsförslag:

a) Ett underrum M till ett linjärt rum V är en delmängd $M \subset V$ sådan att M självt är ett linjärt rum med avseende på samma operationer.

(Sats 1.1 "Linjär algebra fortsättningskurs" duger också bra som definition.)

b)Låt $V_1 = \text{Span}(\boldsymbol{e}_1)$ och $V_2 = \text{Span}(\boldsymbol{e}_2)$ där

$$\boldsymbol{e}_1 = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right) \quad \text{och} \quad \boldsymbol{e}_2 = \text{Span}\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right).$$

Då är $V_1 \cup V_2$ inte ett linjärt rum sedan $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2 \in V_1 \cup V_2$, men $\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 \notin V_1 \cup V_2$ (sedan $\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 \in V_1 \cup V_2$ omm $\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 \in V_1$ och/eller $\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 \in V_2$).

c)

$$U_2 = \left\{ x_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_5 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \middle| \; x_2, x_4, x_5 \in \mathbb{R} \right\} = \text{Span}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right)$$

och

$$U_1 = \text{Span}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right).$$

Det betyder att

$$U_1 + U_2 = \text{Span}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = \text{Span}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right).$$

Konklusion: $\dim(U_1 + U_2) = 4$ och sedan

$$U_1 \cap U_2 \supset \mathrm{Span}\left(\begin{bmatrix}1\\1\\0\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\1\\1\\0\end{bmatrix}\right) \neq \{0\},$$

följer det att $U_1 + U_2$ inte är en direkt summa. ■

6. Låt $f(x) = (1+x^2)^{-1/2}$.

a) Approximera integralen **(2p)**

$$I = \int_0^1 f(x)dx$$

med trapetsformeln med steglängd $h = 1/2$. (Det räcker att skriva svaret som approximationsmetodens summa.)

b) Låt $T(n^{-1})$ beteckna trapetsformelns approximation av integralen I med steglängd $h = 1/n$ där $n \in \mathbb{N}$. Bestäm ett $\bar{n} \in \mathbb{N}$ sådant att **(2p)**

$$|T(n^{-1}) - I| \leq 10^{-10} \quad \text{för alla naturliga tal} \quad n \geq \bar{n}.$$

Det uppges att följande likhet håller för alla $n \geq 1$:

$$T(n^{-1}) - I = \frac{1}{12n^2} f''(\xi_n)$$

där $\xi_n \in [0,1]$.

c) Visa att **(2p)**

$$T(n^{-1}) < I \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

d) Visa att **(3p)**

$$I < \sqrt{\frac{\pi}{4}}.$$

Lösningsförslag:

a)

$$T(1/2) = \frac{1}{4}f(0) + \frac{1}{2}f(1/2) + \frac{1}{4}f(1) = \frac{1}{4} + \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{4}\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

b) För alla $n \geq 1$ gäller att

$$|T(n^{-1}) - I| \leq \frac{1}{12n^2} \max_{x\in[0,1]} |f''(x)| \leq \frac{1}{12n^2}$$

där sista olikhet följer från

$$f''(x) = \left(1+x^2\right)^{-5/2} \left(\frac{3}{2}x^2 - (1+x^2)\right) = \left(1+x^2\right)^{-5/2} \left(\frac{1}{2}x^2 - 1\right) \implies \max_{x\in[0,1]} |f''(x)| \leq 1.$$

Vi söker minsta $\bar{n} \in \mathbb{N}$ sådan att

$$\frac{1}{12\bar{n}^2} \leq 10^{-10},$$

dvs $\bar{n}$ är lika med minsta naturliga talet som är större än $10^5/\sqrt{12}$.

c) Sedan

$$f''(x) = \left(1+x^2\right)^{-5/2} \left(\frac{1}{2}x^2 - 1\right) < 0 \forall x \in [0,1]$$

gäller det för varje $n \in \mathbb{N}$ att

$$T(n^{-1}) = I + \frac{1}{12n^2} f''(\xi_n) < I.$$

d) Genom att använda Cauchy-Schwartz på de linjärt oberoende funktionerna $f(x)$ och $g(x) = 1$ i vektorrummet $C[0,1]$ så fås

$$I = \int_0^1 f(x) 1 dx < \sqrt{\int_0^1 f^2(x) dx} \sqrt{\int_0^1 1^2 dx} = \sqrt{\int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx} = \sqrt{\tan^{-1}(1)} = \sqrt{\frac{\pi}{4}}.$$

■

7. a) Lös följande ordinära differentialekvation med diagonaliseringsmetoden: **(5p)**

$$\left.\begin{aligned} x_1'(t) &= -x_1(t) + x_2(t) \\ x_2'(t) &= x_1(t) - 2x_2(t) + x_3(t) \\ x_3'(t) &= x_2(t) - x_3(t) \end{aligned}\right\} \quad t > 0,$$

med begynnelsevillkoren $x_1(0) = 2$, $x_2(0) = -1$ och $x_3(0) = 1$.

b) Använd Euler bakåtmetoden med steglängd $h = 1$ till att numerisk lösa differentialekvationen ovan en iteration framöver. **(4p)**

Lösningsförslag: a)Vi har ODEen

$$\boldsymbol{x}' = \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}}_{=A} \boldsymbol{x}$$

Det karakteristiska polynomet

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) &= -(1+\lambda) \det \begin{bmatrix} -(2+\lambda) & 1 \\ 1 & -(1+\lambda) \end{bmatrix} - \det \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -(1+\lambda) \end{bmatrix} \\ &= (1+\lambda)(\lambda^2 + 3\lambda) \end{aligned}$$

ger egenvärdena $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = -3$ och med tillhörande ortonormerade egenvektorer

$$\boldsymbol{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_3 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Vid diagonaliseringen $A = VDV^T$, där $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ och $V = [\boldsymbol{v}_1 \ \boldsymbol{v}_2 \ \boldsymbol{v}_3]$, ser vi att $\boldsymbol{z} := V^T \boldsymbol{x}$ löser ODEen $\boldsymbol{z}' = D\boldsymbol{z}$, dvs

$$\boldsymbol{z}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-3t} \end{bmatrix} \boldsymbol{z}_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-3t} \end{bmatrix} V^T \boldsymbol{x}_0 = \begin{bmatrix} \boldsymbol{v}_1^T \boldsymbol{x}_0 \\ e^{-t} \boldsymbol{v}_2^T \boldsymbol{x}_0 \\ e^{-3t} \boldsymbol{v}_3^T \boldsymbol{x}_0 \end{bmatrix}$$

vilket ger

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}(t) = V\boldsymbol{z}(t) &= (\boldsymbol{v}_1^T \boldsymbol{x}_0)\boldsymbol{v}_1 + e^{-t}(\boldsymbol{v}_2^T \boldsymbol{x}_0)\boldsymbol{v}_2 + e^{-3t}(\boldsymbol{v}_3^T \boldsymbol{x}_0)\boldsymbol{v}_3 \\ &= \frac{1}{\sqrt{6}} \left(2\sqrt{2}\boldsymbol{v}_1 + \sqrt{3} e^{-t} \boldsymbol{v}_2 + 5 e^{-3t} \boldsymbol{v}_3 \right) \\ &= \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 4 + 3e^{-t} + 5e^{-3t} \\ 4 - 10e^{-3t} \\ 4 - 3e^{-t} + 5e^{-3t} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

b)

$$\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{x}_0 + hA\boldsymbol{x}_1 \implies \boldsymbol{x}_1 = (I-A)^{-1}\boldsymbol{x}_0 = (\boldsymbol{v}_1^T\boldsymbol{x}_0)\boldsymbol{v}_1 + \frac{1}{2}(\boldsymbol{v}_2^T\boldsymbol{x}_0)\boldsymbol{v}_2 + \frac{1}{4}(\boldsymbol{v}_3^T\boldsymbol{x}_0)\boldsymbol{v}_3 = \frac{1}{8}\begin{bmatrix}9\\2\\5\end{bmatrix}$$

där de två sista stegen följar från

$$(I-A)^{-1} = \left(I - VDV^T\right)^{-1} = \left(V(I-D)V^T\right)^{-1} = V(I-D)^{-1}V^T.$$

(Alternativt kan svaret $(I-A)^{-1}\boldsymbol{x}_0$ fås genom att först beräkna inversen

$$(I-A)^{-1} = \begin{bmatrix}5/8 & 1/4 & 1/8\\ 1/4 & 1/2 & 1/4\\ 1/8 & 1/4 & 5/8\end{bmatrix},$$

t ex med Gaussisk elimination.) ■

SLUT