MATEMATISKA VETENSKAPER **TMA671 2018**
Chalmers tekniska högskola **Datum: 2018-10-13 kl. 08.30–12.30**
Examinator: Håkon Hoel
Hjälpmedel: inga

TMA 671 Linjär Algebra och Numerisk Analys

Tentan består av 6 uppgifter, med varierande antal deluppgifter.
Maximalt antal poäng är 60, och betygsgränserna är 30 för 3 (godkänd), 42 för 4 och 54 för 5. Upp till 10 bonuspoäng från bonusuppgifter får tillgodoräknas.
Renskriv dina lösningar, lämna ej in kladdpapper! Poängavdrag ges för dåligt motiverade, svårtolkade eller svårläsliga lösningar.

Tentan rättas och bedöms anonymt. Resultat meddelas via Ladok ca. tre veckor efter tentamenstillfället.

---

1. a) Visa att följande likhet gäller för alla $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$: **(3p)**

$$\|A\|_2 = \|A^T\|_2.$$

b) Visa att för en positiv definit matris $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ (dvs symmetrisk matris med strikt positiva egenvärden) så är $\det(A) > 1$ endast om **(3p)**

$$\sum_{i=1}^n A_{ii} > n.$$

Det uppges att om $x_1, x_2, \dots, x_k \geq 0$ och $k \in \mathbb{N}$, så gäller följande olikhet

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_k}{k} \geq (x_1 x_2 \cdots x_k)^{1/k}.$$

c) Låt A vara en inverterbar matris med egenvärden $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$. Bestäm egenvärdena till matrisen **(3p)**

$$B = 2A^3 + I - 3A^{-1}.$$

Lösningsförslag:

a) Genom att visa att $\|A\|_2$ är lika med största singulära värdet till A, att det samma gäller för $\|A^T\|_2$, och att A och A^T har samma singulära värden är resultatet klart.

Alternativt bevis: Låt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ beteckna standardskalärprodukten på $\mathbb{R}^n$. Då gäller att

$$\begin{aligned}
\|A\|_2^2 &= \sup_{x\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}} \frac{\langle Ax, Ax\rangle}{\|x\|_2^2} = \sup_{x\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}} \frac{x^T(A^TAx)}{\|x\|_2^2} = \sup_{x\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}} \frac{\langle x, A^TAx\rangle}{\|x\|_2^2} \\
&\leq \sup_{x\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}} \frac{\|x\|_2\|A^TAx\|_2}{\|x\|_2^2} \leq \sup_{x\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}} \frac{\|A^T\|_2\|Ax\|_2}{\|x\|_2} = \|A^T\|_2\|A\|_2,
\end{aligned}$$

där Cauchy-Schwartz används i första olikhet. Konklusion: $\|A^T\|_2 \geq \|A\|_2$. Genom samma argument med matrisen A ersatt av A^T fås att $\|A^T\|_2 \leq \|A\|_2$, vilket bevisar påståendet.

b) Sedan

$$\det(A) = \prod_{k=1}^n \lambda_k \quad \text{och} \quad \sum_{k=1}^n A_{kk} = \sum_{k=1}^n \lambda_k$$

följer det att

$$\det(A) > 1 \implies \left(\prod_{k=1}^n \lambda_k\right)^{1/n} > 1 \implies \frac{\sum_{k=1}^n \lambda_k}{n} > 1 \implies \frac{\sum_{k=1}^n A_{kk}}{n} > 1.$$

c) Om (λ_k, x_k) är ett egenpar till matrisen A följer det att

$$Bx_k = 2A^3x_k + Ix_k - 3A^{-1}x_k = (2\lambda_k^3 + 1 - 3\lambda_k^{-1})x_k.$$

Konklusion: $(2\lambda_k^3 + 1 - 3\lambda_k^{-1})$ för $k = 1, \dots, n$ är egenvärdena till B. (Merk här att λ_k^{-1} är väldefinierad sedan A är inverterbar, som igen implicerar att $\lambda_k \neq 0$ för alla k.)

■

2. Vi betraktar följande ickelinjära ekvationssytem (som kan relateras till GPS triangulering)

$$\begin{aligned} (x-1)^2 + y^2 &= 1 \\ (x-3)^2 + (y-2)^2 &= 9. \end{aligned} \tag{1}$$

a) Bestäm analytiskt de två lösningarna till ekvationssystem (1). **(2p)**

b) Skriv om ekvationssystem (1) så att det kan lösas med Newtons metod. Gör två iterationer med Newtons metod med startgissningen $\boldsymbol{x}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. **(3p)**

c) Antag att den erhållna följden från Newtons metod konvergerar mot gränsen $\lim_{k\to\infty} \boldsymbol{x}_k = \overline{\boldsymbol{x}}$. Beskriv hur man experimentellt kan skatta approximationsfelet $\|\boldsymbol{x}_k - \overline{\boldsymbol{x}}\|_2$ i fall där man inte känner exakta lösningen $\overline{\boldsymbol{x}}$ och skatta approximationsfelet $\|\boldsymbol{x}_2 - \overline{\boldsymbol{x}}\|_2$ experimellt (dvs skatta felet utan att använda värdet $\overline{\boldsymbol{x}}$). **(2p)**

d) Betrakta följande modifierade form av (1) med bivillkor och störning i högerledet: **(3p)**

$$\left.\begin{aligned} (x-1)^2 + y^2 &= 1 + \delta, \\ (x-3)^2 + (y-2)^2 &= 9 + \delta, \\ \text{med bivillkoret} \quad y &> 0. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Vi anser parametern $\delta \in (-1, 1)$ som en störning av indata (när $\delta \neq 0$). Avgör om problem (2) är stabilt.

Lösningsförslag:

a) Ekvationsystem (1) kan skrivas

$$\left.\begin{aligned} x^2 - 2x + y^2 &= 0 \\ x^2 - 6x + y^2 - 4y &= -4 \end{aligned}\right\} \implies x^2 - 2x - (x^2 - 6x) + y^2 - (y^2 - 4y) = 4 \implies y = 1 - x.$$

Genom att ersätta y med $(1-x)$ i första ekvationen får vi

$$2(x-1)^2 = 1 \implies x_\pm = 1 \pm \frac{1}{\sqrt{2}},$$

som ger lösningarna

$$(x_+, y_+) = (1 + 1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}) \quad \text{och} \quad (x_-, y_-) = (1 - 1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$$

b) Det icke-linjära ekvationssystemet kan skrivas

$$F\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{där} \quad F\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} (x-1)^2 + y^2 - 1 \\ (x-3)^2 + (y-2)^2 - 9 \end{bmatrix}.$$

Jakobian till F är lika med

$$J(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} 2(x-1) & 2y \\ 2(x-3) & 2(y-2) \end{bmatrix},$$

och en iteration med Newtons metod är på formen

$$\boldsymbol{x}_{n+1} = \boldsymbol{x}_n - J^{-1}(\boldsymbol{x}_n) F(\boldsymbol{x}_n).$$

Det ger

$$\boldsymbol{x}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ -6 & -4 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix} = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ -6 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

och

$$\boldsymbol{x}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ -6 & -2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{16} \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 6 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/4 \\ 3/4 \end{bmatrix}.$$

c) Sedan $F(\overline{\boldsymbol{x}}) = 0$, ger Taylorutveckling kring $\overline{\boldsymbol{x}}$ att

$$
\begin{aligned}
&F(\boldsymbol{x}_2) \approx J(\overline{\boldsymbol{x}})(\boldsymbol{x}_2 - \overline{\boldsymbol{x}}) \approx J(\boldsymbol{x}_2)(\boldsymbol{x}_2 - \overline{\boldsymbol{x}}) \\
&\implies \|\boldsymbol{x}_2 - \overline{\boldsymbol{x}}\|_2 \approx \|J^{-1}(\boldsymbol{x}_2)F(\boldsymbol{x}_2)\|_2 = \frac{1}{24}\left\|\begin{bmatrix}-5 & -3 \\ 11 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1/8 \\ 1/8\end{bmatrix}\right\|_2 = \frac{1}{24}\left\|\begin{bmatrix}-1 \\ 1\end{bmatrix}\right\|_2 = \frac{\sqrt{2}}{24}.
\end{aligned}
$$

d) Genom att lösa (2) på samma sätt som i uppgift a) får vi lösningen $\boldsymbol{x}(\delta) = (x(\delta), y(\delta))^T$ där

$$
x(\delta) = 1 - \frac{1+\delta}{\sqrt{2}} \quad \text{och} \quad y(\delta) = 1 - x(\delta) = \frac{1+\delta}{\sqrt{2}}.
$$

Om vi betecknar "indatahögerledet" $\boldsymbol{b}(\delta) = (1+\delta, 9+\delta)$ är konditionstalet i 2-normen är lika med

$$
\kappa_2 = \lim_{\delta \to 0} \frac{\|\boldsymbol{x}(\delta) - \boldsymbol{x}(0)\|_2 / \|\boldsymbol{x}(0)\|}{\|\boldsymbol{b}(\delta) - \boldsymbol{b}(0)\|_2 / \|\boldsymbol{b}(0)\|_2} = \frac{\|\boldsymbol{b}(0)\|_2}{\|\boldsymbol{x}(0)\|_2} \lim_{\delta \to 0} \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}\left\|\begin{bmatrix}-\delta \\ \delta\end{bmatrix}\right\|_2}{\left\|\begin{bmatrix}\delta \\ \delta\end{bmatrix}\right\|_2} = \frac{\sqrt{82}}{2(\sqrt{2}-1)} \leq 12.
$$

Konklusion: Jag betraktar 12 som ett relativt litet konditioinstal och problemet är stabilt. (Sedan definitionen stabil/instabil är flytande ges det också poäng om du har beräknat konditionstalet på riktigt sätt men argumenterar för att det för det givna problemet är ett stort konditionstal och att problemet därmed är instabilt.) ■

3. I denna uppgiften studerar vi linjära avbildningar.

a) Låt U och V vara reella linjära rum. Beskriv egenskaperna till en linjär avbildning $F : U \to V$. **(1p)**

b) Låt $\mathcal{P}$ beteckna reella linjära rummet av alla polynom. Bestäm om följande avbildningar på $\mathcal{P}$ är linjära: **(2p)**

$$
\begin{aligned}
F_1(p)(t) &= 2p''(t) + 3p'(t) + p(0) \\
F_2(p)(t) &= (p(t) - 1)^2 - (p(t) + 1)^2 + p(t-1)
\end{aligned}
$$

c) Låt $\mathcal{P}_2$ beteckna reella linjära rummet av polynom av grad högst 2 och betrakta följande två basor för $\mathcal{P}_2$: **(2p)**

$$
\mathcal{E} = \{1, t, t^2\} \quad \text{och} \quad \mathcal{B} = \{1+t, 1+2t, t^2+2t-1\}.
$$

För godtyckligt polynom $p(t) = c_1 + c_2 t + c_3 t^2 \in \mathcal{P}_2$ betecknar $[p]_{\mathcal{E}} = \boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^3$ där $\boldsymbol{c} = (c_1, c_2, c_3)^T$ är koordinaterna till p i basen $\mathcal{E}$. På samma sätt låter vi $[p]_{\mathcal{B}} = \boldsymbol{d} \in \mathbb{R}^3$ beteckna koordinaterna till p i basen $\mathcal{B}$. Bestäm (den entydiga) matrisen $T \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ sådan att följande likhet gäller för alla $p \in \mathcal{P}_2$:

$$
[p]_{\mathcal{E}} = T[p]_{\mathcal{B}}.
$$

d) Låt $F : \mathcal{P}_2 \to \mathcal{P}_2$ vara en linjär avbildning vars matris i basen $\mathcal{B}$ är lika med **(4p)**

$$
A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 2 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.
$$

Bestäm matrisen till linjära avbildningen $G(p) = F(p' + 2p)$ i basen $\mathcal{E}$.

Lösningsförslag:

a) F kallas linjär om ekvationen

$$
F(\alpha u_1 + \beta u_2) = \alpha F(u_1) + \beta F(u_2)
$$

gäller för alla $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ och alla $u_1, u_2 \in U$.

b)För $p, q \in \mathcal{P}$ gäller att

$$\begin{aligned} F_1(\alpha p + \beta q)(t) &= 2(\alpha p + \beta q)''(t) + 3(\alpha p + \beta q)'(t) + (\alpha p + \beta q)(0) \\ &= 2\alpha p''(t) + 3\alpha p'(t) + \alpha p(0) + 2\beta q''(t) + 3\beta q'(t) + \beta q(0) \\ &= \alpha F(p)(t) + \beta F(q)(t), \end{aligned}$$

och

$$F_2(p)(t) = (p(t) - 1)^2 - (p(t) + 1)^2 + p(t - 1) = -4p(t) + p(t - 1)$$

implicerar att

$$\begin{aligned} F_2(\alpha p + \beta q)(t) &= -4(\alpha p + \beta q)(t) + (\alpha p + \beta q)(t - 1) \\ &= \alpha(-4p(t) + p(t - 1)) + \beta(-4q(t) + q(t - 1)) = \alpha F(p)(t) + \beta F(q)(t). \end{aligned}$$

Konklusion: Båda F_1 och F_2 är linjära avbildningar.

c)Vi betecknar respektive basors basvektorer som följer: $\mathcal{E} = \{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ och $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3\}$. Då är

$$[p]_{\mathcal{E}} = [d_1\boldsymbol{b}_1 + d_2\boldsymbol{b}_2 + d_3\boldsymbol{b}_3]_{\mathcal{E}} = [\boldsymbol{b}_1\ \boldsymbol{b}_2\ \boldsymbol{b}_3]_{\mathcal{E}}\boldsymbol{d} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{=T} [p]_{\mathcal{B}}.$$

d) Sedan $T_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{B}} = T^{-1}$, kan matrisen till F i basen $\mathcal{E}$ skrivas är på formen $A_2 = TAT^{-1}$ där

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 \\ -1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \text{som ger} \quad A_2 = T \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 2 & 5 & 8 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Matrisen till G i basen $\mathcal{E}$ bestäms av ekvationen

$$\begin{aligned} B &= [G(\boldsymbol{e}_1)\ G(\boldsymbol{e}_2)\ G(\boldsymbol{e}_3)]_{\mathcal{E}} = [F(\boldsymbol{e}_1' + 2\boldsymbol{e}_1)\ F(\boldsymbol{e}_2' + 2\boldsymbol{e}_2)\ F(\boldsymbol{e}_3' + 2\boldsymbol{e}_3)]_{\mathcal{E}} \\ &= [F(2)\ F(1 + 2t)\ F(2t + 2t^2)]_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 4 & 8 & 6 \\ 4 & 12 & 26 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

■

4. a) Definiera begreppet affint rum. **(1p)**

b) Antag att $v_1, \ldots, v_k$, $k \geq 1$ är linjärt oberoende vektorer i det reella linjära rummet V. Visa att **(3p)**

$$M = \left\{ \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_k v_k \,\middle|\, \lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R} \quad \text{och} \quad \sum_{j=1}^{k} \lambda_j = 1 \right\}$$

är ett affint rum.

c) Låt U och V vara två ändligdimensionella rella vektorrum med $\dim U = m$, $\quad \dim V = n$ och $n < m/2$. Låt $F : U \to V$ och $G : U \to V$ vara linjära avbildningar och betrakta ekvationssystemet

$$\begin{aligned} F(x) &= b_1 \\ G(x) &= b_2, \end{aligned} \tag{3}$$

där $b_1 \in V(F)$ och $b_2 \in V(G)$ ($V(F)$ och $V(G)$ betecknar värderummen till respektive avbildningar). Låt $x_p \in U$ vara en partikulärlösning till ekvationssystem (3) (klargörande: vi antar alltså att ekvationssystemet har minst en lösning).

Bevisa följande två resultat:

(i) $x \in U$ är en lösning till ekvationssystem (3) om och endast om $x = x_p + x_h$ där $x_h \in N(F) \cap N(G)$. ($N(F)$ och $N(G)$ betecknar nollrummen till respektive avbildningar.) **(3p)**

(ii) Ekvationssystem (3) har ett oändligt antal lösningar. **(4p)**

Lösningsförslag:

a) En delmängd M till ett linjärt rum V kallas affin om det finns en $u_0 \in V$ och ett underrum U så att $M = u_0 + U$.

b)

$$\begin{aligned} M &= \left\{ \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_k v_k \,\middle|\, \lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R} \quad \text{och} \quad \sum_{j=1}^{k} \lambda_j = 1 \right\} \\ &= \left\{ \left(1 - \sum_{j=2}^{k} \lambda_j\right) v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_k v_k \,\middle|\, \lambda_2, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R} \right\} \\ &= v_1 + \{\lambda_2(v_2 - v_1) + \ldots + \lambda_k(v_k - v_1) \mid \lambda_2, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}\} \\ &= v_1 + \operatorname{Span}((v_2 - v_1), (v_3 - v_1), \ldots, (v_k - v_1)), \end{aligned}$$

och $\operatorname{Span}((v_2 - v_1), (v_3 - v_1), \ldots, (v_k - v_1))$ är ett underrum av V.

c) i)

$$\left.\begin{aligned} F(x) &= b_1 \\ G(x) &= b_2 \end{aligned}\right\} \iff \left.\begin{aligned} F(x) &= F(x_p) \\ G(x) &= G(x_p) \end{aligned}\right\} \iff \left.\begin{aligned} F(x - x_p) &= 0 \\ G(x - x_p) &= 0 \end{aligned}\right\} \iff (x - x_p) \in N(F) \cap N(G).$$

ii) Om vi kan visa att $\dim(N(F) \cap N(G)) \geq 1$ följer resultatet. (Då finns ett icke-noll element x_h i $N(F) \cap N(G)$, och sedan $N(F) \cap N(G)$ är underrum till U löser $x_\lambda = x_p + \lambda x_h$ ekvationssystem (3) för alla $\lambda \in \mathbb{R}$.)

Enligt dimensionssatsen är

$$\dim(N(F)) = \dim(U) - \dim(V(F)) \geq \dim(U) - \dim(V) = m - n > m/2,$$

och, på samma sätt, $\dim(N(G)) > m/2$. Antag att $\dim(N(F) \cap N(G)) = 0$. Då är $N(F) \cap N(G) = \{0\}$, som betyder att $N(F) + N(G)$ är en direkt summa och

$$\dim(N(F) + N(G)) = \dim(N(F)) + \dim(N(G)) > m.$$

Det leder till en motsägelse för $N(F) + N(G) \subset U$ implicerar att

$$\dim(N(F) + N(G)) \leq \dim(U) \leq m.$$

Konklusion: Att antaga att $\dim(N(F) + N(G)) = 0$ leder till en motsägelse. Därmed måste $\dim(N(F) + N(G)) \geq 1$ och resultatet följer från meningen i parentes ovan.

$\blacksquare$

5. Vi studerar minimeringsproblemet

$$\min_{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3} f(\boldsymbol{x}), \quad \text{där} \quad f(\boldsymbol{x}) = (x_3^2 - 1)^2 + (x_1^2 - x_2)^2 + (2 - x_1)^2 + 2x_1\,.$$

a) Beräkna $\nabla f(\boldsymbol{x})$. **(1p)**

b) Bestäm alla kritiska punkter till f analytiskt. Visa att funktionen minst har två lokala minima. **(4p)**

c) Definiera begreppet descentrikning $\boldsymbol{s}$ i $\boldsymbol{x}$ (för funktionen f ovan) och bestäm vilka av **(3p)** följande sökriktningar

$$s_1 = \begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix} \quad \text{och} \quad s_2 = \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} \quad \text{som är descentriktningar i} \quad x = \begin{bmatrix}2\\1\\0\end{bmatrix}.$$

d) Beräkna ett iterationssteg med steepest descentmetoden med exakt lösning av linjesökningsproblemet och startgissning $x_0 = \begin{bmatrix}-1\\2\\1\end{bmatrix}$. **(3p)**

Lösningsförslag:

a)

$$\nabla f(x) = \begin{bmatrix}4x_1(x_1^2 - x_2) - 2(2 - x_1) + 2\\ -2(x_1^2 - x_2)\\ 4x_3(x_3^2 - 1)\end{bmatrix}$$

b) Punkten x är kritisk endast om $\nabla f(x) = 0$. Det ger

$$4x_3(x_3^2 - 1) = 0 \implies x_3 = 0, -1, \text{eller } 1,$$

$$-2(x_1^2 - x_2) = 0 \implies x_2 = x_1^2,$$

och

$$-2(2 - x_1) + 2 = 0 \implies x_1 = 1 \implies x_2 = 1.$$

Kritiska punkten

$$x_1 = \begin{bmatrix}1\\1\\-1\end{bmatrix}, \quad x_2 = \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}, \quad \text{och} \quad x_3 = \begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}.$$

Hessianen till f är lika med

$$H(x) = \begin{bmatrix}12x_1^2 - 4x_2 + 2 & -4x_1 & 0\\ -4x_1 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 12x_3^2 - 4\end{bmatrix}.$$

En kritisk punkt x där $H(b)$ är ett lokalt minimum till f. Sedan

$$H(x_1) = H(x_2) = \begin{bmatrix}10 & -4 & 0\\ -4 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 8\end{bmatrix}$$

endast har strikt positiva egenvärden, $\lambda = 8, 6 \pm 4\sqrt{2}$, och är diagonaliserbar (sedan Hessianen är symmetrisk) följer det att $H(x_1) = H(x_2)$ är positiv definit så båda x_1 och x_2 är lokala minima till f.

c) s är en decentriktning i x om det finns en $\delta > 0$ sådan att

$$f(x + \alpha s) < f(x) \quad \text{för alla } \alpha \in (0, \delta).$$

För alla $\alpha > 0$ är

$$\begin{aligned} f(x + \alpha s_1) &= (0 - 1)^2 + ((2 + \alpha)^2 - (1 + \alpha))^2 + (2 - (2 + \alpha))^2 + 2(2 + \alpha)\\ &= 1 + (3(1 + \alpha) + \alpha^2))^2 + \alpha^2 + 4 + 2\alpha > 1 + 3^2 + 4 = f(x), \end{aligned}$$

och för alla $\alpha \in (0, \sqrt{2})$,

$$f(x + \alpha s_2) = (\alpha^2 - 1)^2 + (4 - 1)^2 + (2 - 2)^2 + 4 = \alpha^2(\alpha^2 - 2) + 14 < 14 = f(x).$$

Konklusion: endast s_2 är decentriktning i x.

d) Sökriktning:

$$\boldsymbol{s}_0 = -\nabla f(\boldsymbol{x}_0) = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix},$$

steglängd:

$$\alpha_0 = \arg\min_{\alpha\in\mathbb{R}} f(\boldsymbol{x}_0 + \alpha \boldsymbol{s}_0),$$

vilket motsvarar att bestämma en α som minimerar funktionen

$$g(\alpha) = (1-(2-2\alpha))^2 + 9 - 2 = (2\alpha-1)^2 + 7 \implies \alpha_0 = 1/2.$$

Iteration:

$$\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{x}_0 + \alpha_0 \boldsymbol{s}_0 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

■

6. Vi betraktar följande andra ordningens ordinära differentialekvation (ODE)

$$x''(t) = -V'(x(t)), \qquad t \geq 0 \tag{4}$$

där $V \in C^\infty(\mathbb{R})$ är en potentialfunktion och vi har begynnelsevillkoren $x(0) = 1$ och $x'(0) = 0$.

a) Visa att ekvationen ovan kan skrivas om till följande första ordningens ekvationssytem **(2p)**

$$\left.\begin{aligned} x_1'(t) &= x_2(t) \\ x_2'(t) &= -V'(x_1(t)) \end{aligned}\right\}, \qquad t \geq 0 \tag{5}$$

med $x_1(0) = 1$ och $x_2(0) = 0$.

b) Antag att ODEen (5) har en entydig och kontinuerlig deriverbar lösning $\boldsymbol{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$ **(2p)** för alla tider $t \geq 0$ och betrakta Hamiltonianen $H(t) := V(x_1(t)) + \frac{1}{2}(x_2(t))^2$. Visa att Hamiltonianen bevaras. Dvs, visa att $H(t) = H(0)$ för alla $t \geq 0$.

c) Betrakta ODEen (5) med potentialfunktionen $V(x) = \frac{1}{2}x^2$ (som kallas den harmoniska oscillatorn), dvs den linjära ODEen **(3p)**

$$\left.\begin{aligned} x_1'(t) &= x_2(t) \\ x_2'(t) &= -x_1(t) \end{aligned}\right\} \qquad t \geq 0, \tag{6}$$

och låt $\boldsymbol{x}$ och $\boldsymbol{x}_\delta$ beteckna entydiga lösningarna till (6) för respektive begynnelsevillkor

$$\boldsymbol{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad \boldsymbol{x}_\delta(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ \delta \end{bmatrix}, \quad \text{för någon} \quad \delta > 0.$$

Visa att

$$\|\boldsymbol{x}(t) - \boldsymbol{x}_\delta(t)\|_2 \leq \delta \quad \forall t \geq 0.$$

d) Gör en iteration med steglängd $h = 1/2$ med trapetsmetoden för att lösa ODEen (6) med begynnelsevillkoren $\boldsymbol{x}_0 = (1,0)^T$. Bevarar den numeriska lösning Hamiltonianen? **(3p)**

Lösningsförslag:

a) Definiera $x_1 = x$ och $x_2 = x'$. Det ger

$$x_1' = x' = x_2 \quad \text{och} \quad x_2' = x'' = -V'(x) = -V'(x_1),$$

med begynnelsevillkoren $x_1(0) = x(0) = 1$ och $x_2(0) = x'(0) = 0$.

b) Genom att använda kedjeregeln och ODEen (5) gäller det för alla $t \geq 0$ att

$$\begin{aligned} H'(t) &= \frac{d}{dt}\left(V(x_1(t)) + \frac{1}{2}(x_2(t))^2\right) \\ &= V'(x_1(t))x_1'(t) + x_2'(t)x_2(t) = V'(x_1(t))x_2(t) - V'(x_1(t))x_2(t) = 0. \end{aligned}$$

Konklusion: $H'(t) = 0$ för alla $t \geq 0$ implicerar att $H(t) = H(0)$ för alla $t \geq 0$.

c) Funktionen $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_\delta$ löser ekvationssystemet

$$\begin{aligned} y_1' &= x_1' - x_{1,\delta}' = x_2' - x_{2,\delta}' = y_2 \\ y_2' &= x_2' - x_{2,\delta}' = -x_1' + x_{1,\delta}' = -y_1' \end{aligned}$$

för $t \geq 0$ med begynnelsevillkoret $y_1(0) = 0$ och $y_2(0) = -\delta$. Från uppgift b) följer det att Hamiltonianen

$$H(t) = V(y_1(t)) + \frac{1}{2}(y_2(t))^2 = \frac{1}{2}\|\boldsymbol{y}(t)\|_2^2$$

bevaras. Med andra ord

$$\underbrace{\|\boldsymbol{y}(t)\|_2^2}_{2H(t)} = \underbrace{\|\boldsymbol{y}(0)\|_2^2}_{2H(0)} \quad \forall t \geq 0,$$

som, sedan $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_\delta$, kan skrivas

$$\|\boldsymbol{x}(t) - \boldsymbol{x}_\delta(t)\|_2 = \|\boldsymbol{x}(0) - \boldsymbol{x}_\delta(0)\|_2 = \delta \quad \forall t \geq 0.$$

d)ODEen (6) kan skrivas

$$\boldsymbol{x}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}.$$

Trapetsmetoden:

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{x}_0 + \frac{h}{2}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}(\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{x}_1) \\ &\implies \boldsymbol{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1/4 \\ 1/4 & 1 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 1 & 1/4 \\ -1/4 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{16}{17}\begin{bmatrix} 1 & 1/4 \\ -1/4 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1/4 \\ -1/4 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{17}\begin{bmatrix} 15 \\ -8 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Sedan Hamiltonian i detta fallet är lika med $H(t) = \frac{1}{2}\|\boldsymbol{x}\|_2^2$,

$$\|\boldsymbol{x}_1\|_2^2 = \frac{15^2 + 8^2}{17^2} = 1 \quad \text{och} \quad \|\boldsymbol{x}_0\|_2^2 = 1,$$

så bevarar numeriska lösningen Hamiltonianen. (Kuriosa: Numeriska lösningar av ODE på formen ovan med Euler framåt och bakåt bevarar generellt inte (även approximativt) Hamiltonianen och är av det skälet inte (så) lämpliga till många beräkningar av modeller med Newtonsk dynamik, t ex planetdynamik och molekyldynamik.) ■

SLUT