

Linjär algebra och numerisk analys, 2019

Bonusuppgift nummer 4: Linjärt ekvationssystem, kondition och stabilitet, maximalt 4 bonuspoäng

Hilbertmatrisen H av ordning $n \times n$ definieras genom elementen $h_{ij} = \frac{1}{i+j-1}$ och genereras i MATLAB med kommandot `hilb`.

Uppgifter:

- a. Bestäm för $n = 1, 2, \dots$, Hilbertmatrisen av ordning $n \times n$ och beräkna $b = Hx$, där x är vektorn med enbart ettor. Lös systemet $Hx = b$ med backslash i MATLAB och låt lösningen vara \hat{x} .
- b. Beräkna felet $\hat{x} - x$ och residualen $r = b - H\hat{x}$. Hur stort kan n vara innan approximationen \hat{x} blir oanvändbar?
- c. Rita ut normen av felet, $\|\hat{x} - x\|_2$ som funktion av n och normen av residualen $\|r\|_2$ som funktion av n . Gör detta endast för n -värden som du bedömt ge en användbar approximation i b)-uppgiften. Vad drar du för slutsats? Är residualen ett bra mått på felets storlek i allmänhet? Om inte, vad är i så fall residualen ett mått på?
- d. Beräkna konditionstalet $\kappa(H)$ för H med `cond` i MATLAB. Försök karakterisera $\kappa(H)$ som funktion av n för n -värden som du bedömt användbara i b)-uppgiften. Hur relaterar felet $\|\hat{x} - x\|_2$ till konditionstalet? Jämför med teorin för störningsanalys enligt avsnitt 5.6 i *Numerisk Analys*.

Inlämning. Svar på frågorna med grafik och körningsresultat som underlag.