

Linjär algebra och numerisk analys, 2019

Bonusuppgift nummer 7: Simultant diagonaliserbara matriser, maximalt 3 bonuspoäng

Låt V vara ändligdimensionellt linjärt rum, och $F : V \rightarrow V$ och $G : V \rightarrow V$ linjära transformationer som är diagonaliserbara, det vill säga: Det finns en bas \mathbf{e} för V , så att matrisen till F i basen \mathbf{e} är diagonal, och en bas \mathbf{f} till V så att matrisen till G i \mathbf{f} är diagonal.

Uppgifter: a. Visa att om F och G är simultant diagonaliserbara, det vill säga at $\mathbf{e} = \mathbf{f}$, så är

$$F(G(x)) = G(F(x)) \quad \text{för alla } x \in V.$$

b. Visa att om

$$F(G(x)) = G(F(x)) \quad \text{för alla } x \in V,$$

så finns en bas \mathbf{g} (möjligtvis olik båda \mathbf{e} och \mathbf{f}) så att matriserna till båda F och G i \mathbf{g} är diagonala.

Inlämning: Bevis för de två satserna.