Repetition TMA671

Thomas Bäckdahl

27 maj 2019

(Baserat på slides av Håkon Hoel)

Översikt

Linjär Algebra kapitel 1

Reellt linjärt rum $(V, \oplus, \odot; \mathbb{R})$

(1) För alla $u, v \in V$ finns ett entydigt bestämt element $u \oplus v \in V$.

(2) För alla $u \in V$ och $\alpha \in R$ finns ett entydigt bestämt element $\alpha \odot u \in V$.

Dessa två operationer, addition och multiplikation med tal (eller *skalär*) ska uppfylla följande räknelagar:

(3) $u \oplus v = v \oplus u$ för alla $u, v \in V$. (Kommutativ lag)

(4) $(u \oplus v) \oplus w = u \oplus (v \oplus w)$ för alla $u, v, w \in V$. (Associativ lag)

(5) Det finns ett element $0_V \in V$ (*nollelementet*) så att $0_V \oplus u = u \oplus 0_V = u$ för alla $u \in V$.

(6) För varje $u \in V$ finns ett element $-u \in V$ (*additiv invers*) så att $u \oplus (-u) = (-u) \oplus u = 0_V$.

(7) $\alpha \odot (\beta \odot u) = (\alpha\beta) \odot u$ för alla $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R},\ u \in V$. (Associativ lag)

(8) $\alpha \odot (u \oplus v) = \alpha \odot u \oplus \alpha \odot v$ för alla $\alpha \in \mathbb{R},\ \ u,\ v \in V$. (Dist. lag)

(9) $(\alpha + \beta) \odot u = \alpha \odot u \oplus \beta \odot u$ för alla $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R},\ \ u \in V$. (Dist. lag)

(10) $1 \odot u = u$ för alla $u \in V$.

Följdsatser och ett exotiskt linjärt rum

Fundamentala konsekvenser/följdsatser av räknelagarna:

- Nollelementet $0_V \in V$ är entydigt. (Tips: Lagarna 3. och 5.)
- $0 \odot u = 0_V$ för alla $u \in V$. (Tips: 5. och 9.)
- $\alpha \odot 0_V = 0_V$ för alla $\alpha \in \mathbb{R}$. (Tips: 5. och 8.)
- Varje element $u \in V$ har en entydig additiv invers $-u$. (Tips: 4., 5., och 6.)
- $(-1) \odot u = -u$ för alla $u \in V$. (Tips: 5. och 10.)

Exotiskt linjärt rum: Mängden $V = (0, \infty) =: \mathbb{R}_+$ och för alla $\alpha \in \mathbb{R}$ och $u, v \in \mathbb{R}_+$,

$$u \oplus v := uv \qquad \alpha \odot u := u^\alpha.$$

Obs! Enligt ovan är $0_V = 0 \odot u = 1$ och $-u = (-1) \odot u = u^{-1}$!!!

Exempel linjära rum

Reella linjära rum med "vanlig" addition och multiplikationsoperationer:

- Euklidiska vektorrummet $\mathbb{R}^n$ där
$$x \oplus y = x + y = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)$$
och
$$\alpha \odot x = \alpha x = (\alpha x_1, \ldots, \alpha x_n).$$
- Mängden $\mathbb{R}^{n \times n}$ där
$$A \oplus B = A + B \quad \text{och} \quad \alpha \odot A = \alpha A.$$
- Mängden $C[0, 1]$ där
$$(f \oplus g)(t) = f(t) + g(t) \quad \text{och} \quad (\alpha \odot f)(t) = \alpha f(t) \quad \forall t \in [0, 1]$$

Underrum

- Definition 1.2: Om $(V, \oplus, \odot)$ är ett linjärt rum och $M \subseteq V$ sådan att $(M, \oplus, \odot)$ också är ett linj. rum, så sägs $(M, \oplus, \odot)$ vara ett **underrum** av $(V, \oplus, \odot)$.
- I fortsättningen antar vi att operationerna $\oplus$ och $\odot$ är underförstådda och skriver $u + v$ och αu för de respektive operationerna, och vi skriver 0 för nollelementet 0_V.
- På kortform säger vi att M är underrum av V.
- Exempel: Punkten $\mathrm{Span}(0) = \{0\}$. Linje/plan/hyperplan av dimension $< n$ genom origo är underrum av $\mathbb{R}^n$. $\mathcal{P} \subset C[0, 1]$.
- Sats 1.1: En icke-tom delmängd $M \subseteq V$ är ett underrum av V omm

$$u, v \in M \text{ och } \alpha, \beta \in \mathbb{R} \implies \alpha u + \beta v \in M.$$

Linjära avbildningar

- Def 1.6: Låt U och V vara reella linj. rum. En avbildning $F : U \to V$ kallar linjär om
$$F(\alpha u + \beta v) = \alpha F(u) + \beta F(v) \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad \& \quad \forall u, v \in \mathbb{R}.$$
- Implikationer
$$F(\sum_{i=1}^{k} \alpha_i u_i) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i F(u_i) \quad \text{och} \quad F(0) = 0 \quad (\in V).$$

Exempel:

- $F(x) = Ax$ där $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ och $x \in \mathbb{R}^n$ är linj. avb. från $\mathbb{R}^n$ till $\mathbb{R}^m$.
- $U = C^2[0,1]$ och $V = C[0,1]$ och Laplaceoperatorn $F(u)(t) = u''(t)$.

Nollrum och värderum

- Def 1.7 Låt $F : U \to V$ vara linj. avb. Nollrummet och värderummet till F ges av

$$N(F) = \{u \in U \mid F(u) = 0\}$$

respektive

$$V(F) = \{v \in V \mid v = F(u) \quad \text{för något } u \in U\} = \{F(u) \mid u \in U\}.$$

- Egenskaper: $N(F)$ är underrum av U och $V(F)$ är underrum av V.
- I specialfallet $F(x) = Ax$ med $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ skriver vi

$$N(F) = N(A) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = 0\},$$

$$V(F) = V(A) = \{Ax \mid x \in \mathbb{R}^n\} = \operatorname{Span}(a_1, a_2, \ldots, a_n).$$

Sats 1.4 - relation affina rum och lösningsmängd

Sats 1.4 Om u_p löser den linjära ekvationen $F(u_p) = v$, så är lösningsmängden till ekvationen den affina mängden $u_p + N(F)$.

Bevis: u är element i lösningsmängden omm

$$F(u) - F(u_p) = 0 \iff F(u - u_p) = 0 \iff u - u_p \in N(F)$$
$$\iff u \in u_p + N(F).$$

Span, linj. beroende

- Om $u_1, \ldots, u_n \in V$ så är

$$\text{Span}(u_1, \ldots, u_n) := \{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i \mid \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}\}$$

  ett underrum av V och om $\text{Span}(u_1, \ldots, u_n) = V$ säger vi att vektorerna spänner upp V.

- Vektorerna $u_1, \ldots, u_n \in V$ är **linjärt beroende** om det finns (icke-trivial) $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, som löser ekvationen

$$x_1 u_1 + \ldots + x_n u_n = 0.$$

  Vektorerna är **linjärt oberoende** om ekvationen endast håller för $x = 0$.

Dimension

- **Bas:** Om $u_1, \ldots, u_n \in V$ är linj. oberoende och spänner upp V, kallas vektorerna en bas för V. Viktig egenskap: varje $u \in V$ har en entydig representation i koordinaterna till basen $u_1, \ldots, u_n$.
- **Dimension:**

$$\dim(V) = \text{maximala antalet linj. oberoende vektorer i V.}$$

  Om det inte finns ett maximalt antal, så är $\dim(V) = \infty$.
- Lemma 1.2 Om $u_1, \ldots, u_m \in V$ är linj. oberoende och $\mathrm{Span}(u_1, \ldots, u_m) \neq V$, så finns det en vektor $u_{m+1} \in V \setminus \mathrm{Span}(u_1, \ldots, u_m)$ så att $u_1, \ldots, u_m, u_{m+1}$ är linj. oberoende.
- Slutsats: (Lemma 1.2 och sats 1.5) Varje ändligdimensionellt linj. rum V med $\dim(V) > 0$ har minst en bas.
- (Sats 1.5-7): Alla baser för ett ändligdimensionellt linj. rum består av precis $n = \dim(V)$ vektorer.

Summarum och direkt summa

- Om V_1 och V_2 är underrum av V så är summarummet
$$V_1 + V_2 = \{u_1 + u_2 \mid u_1 \in V_1 \text{ och } u_2 \in V_2\}$$
också underrum.
- Om varje element $u \in V_1 + V_2$ har en entydig uppdelning
$$u = u_1 + u_2 \quad \text{var} \quad u_1 \in V_1 \text{ och } u_2 \in V_2$$
så kallas summarummet en **direkt summa**, och man skriver $V_1 \oplus V_2$.

Egenskaper:

- (Lemma 1.4) $V_1 + V_2 = V_1 \oplus V_2$ omm $V_1 \cap V_2 = \{0\}$.
- (Sats 1.12 och 1.13) $\dim(V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_k) = \sum_{j=1}^{k} \dim(V_j)$.
- tillämpning, MK-metoden: $V(A) \oplus V(A)^{\perp} = V(A) \oplus N(A^T)$.

Dimensions och rangsatsen

- (§1.14 Dimensionssatsen - matris) För $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ gäller att

$$\dim(N(A)) + \dim(V(A)) = n.$$

Beviside: $\dim(V(A)) = \#$pivotkolonner, $\dim(N(A)) = \#$fria variabler (dvs antalet icke-pivotkolonner).

- (§3.1 Dimensionssatsen - linj. avb.) För $F : U \to V$ där $\dim(U) = n < \infty$ och V ändlig- eller oändligdimensionellt linj. rum, då är

$$\dim(N(F)) + \dim(V(F)) = \dim(U).$$

- Tillämpning: Om du känner två av dimensionsvärdena kan du beräkna sista värdet:

$$A \in \mathbb{R}^{m \times n} \quad \text{och} \quad \dim(V(A)) = k \implies \dim(N(A)) = n - k.$$

Se också LA Exempel 3.7.

Rangsatsen

- (§1.14 Rangsatsen) För godtycklig $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ gäller att

$$\dim(V(A)) = \dim(V(A^T))$$

dvs kolonnrangen är lika med radrangen till matrisen, det gemensamma värdet är definierad som matrisens rang

$$\text{Rang}\,(A) := \dim(V(A)) \quad (= \dim(V(A^T))).$$

Egenskaper för $m \times n$ matrisen A:

- $Ax = b$ är lösbar $\forall b \in \mathbb{R}^m$ omm $\text{Rang}\,(A) = m$.
(Inte möjligt om $m > n$.)
- Om $n = m$ är A inverterbar (och $\det(A) \neq 0$) omm $\text{Rang}\,(A) = n$, dvs omm matrisen har full rang.

Koordinater och basbyte

- Om $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_n\}$ är bas för V så kan varje $u \in V$ representeras entydigt i basen
$$u = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i.$$
Här är $[u]_\mathcal{E} := (x_1, \dots, x_n) = x \in \mathbb{R}^n$ **koordinatvektorn** till u i basen $\mathcal{E}$.
- Motsvarigheten $[\cdot]_\mathcal{E} : V \to \mathbb{R}^n$ där $[u]_\mathcal{E} := x$ är bijektiv och linjär:
$$[\alpha u + \beta v]_\mathcal{E} = \alpha x + \beta y \quad \text{och} \quad [\alpha x + \beta y]_\mathcal{E}^{-1} = \alpha u + \beta v.$$

Koordinater och basbyte

- Koordinatbyte: Om $\mathcal{E}' = \{e'_1, \ldots, e'_n\}$ är annan bas för V med $x' = [u]_{\mathcal{E}'}$. Relation mellan koordinatvektorer:

$$x = [u]_{\mathcal{E}} = \left[\sum_{i=1}^{n} x'_i e'_i\right]_{\mathcal{E}} = \sum_{i=1}^{n} x'_i [e_i]_{\mathcal{E}} = \underbrace{[e'_1\, e'_2 \ldots e'_n]_{\mathcal{E}}}_{=: T_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{E}'}} x'$$

- Koordinattransformation/basbyte från $\mathcal{E}'$ till $\mathcal{E}$:

$$[u]_{\mathcal{E}} = T_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{E}'}[u]_{\mathcal{E}'} \quad \text{alternativt} \quad x = Tx'$$
$$[u]_{\mathcal{E}'} = T^{-1}_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{E}'}[u]_{\mathcal{E}} = T_{\mathcal{E}'\leftarrow\mathcal{E}}[u]_{\mathcal{E}} \quad \text{alternativt} \quad x' = T^{-1}x.$$

Linjär Algebra kapitel 2

Skalärprodukt

Låt V vara reellt linj. rum. Skalärprodukten $\langle\cdot,\cdot\rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ är en funktion med följande egenskaper. För alla $u, v, w \in V$ och $\alpha \in \mathbb{R}$ gäller:

(i) $\langle u, v\rangle = \langle v, u\rangle$,
(ii) $\langle \alpha u, v\rangle = \alpha\langle u, v\rangle$,
(iii) $\langle u + v, w\rangle = \langle u, w\rangle + \langle v, w\rangle$,
(iv) $\langle u, u\rangle \geq 0$ och $\langle u, u\rangle = 0$ endast för $u = 0$.

Exempel:

- $\langle x, y\rangle = x^T y$ på $\mathbb{R}^n$.
- För varje symmetrisk och positivt definit $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ är $\langle x, y\rangle_A := x^T A y$ en skalärprodukt.
- På $C[0, 1]$:

$$\langle f, g\rangle_\varphi := \int_0^1 f(t)g(t)\varphi(t)\,dt$$

en skalärprodukt för varje $\varphi \in C[0, 1]$ som uppfyller $\varphi \geq 0$ och $\varphi(t) = 0$ endast vid ett ändligt antal punkter ($\varphi = 1$, $\varphi(t) = e^{-t}$, $\varphi(t) = sin^2(4\pi t)$ är exempel på sådana funktioner).

Inducerad norm

Från en given skalärprodukt på V induceras normen

$$\|u\| := \sqrt{\langle u, u \rangle}.$$

En norm $\|\cdot\| : V \to [0, \infty)$ måste uppfylla följande lagar för alla $u, v \in V$ och $\alpha \in \mathbb{R}$:

(i) $\|u\| \geq 0$ och $\|u\| = 0$ endast om $u = 0$

(ii) $\|\alpha u\| = |\alpha| \|u\|$

(iii) $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$ (triangelolikheten).

Enkelt att visa att (i) och (ii) uppfylls av inducerad norm.

Triangelolikheten följer (se §.2.2) från Cauchy-Schwarz olikhet (§2.1):

$$|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \|v\| \quad \forall u, v \in V$$

med likhet endast om u och v är linj. beroende.

Andra normer i $\mathbb{R}^n$ och matrisnormer

- På $\mathbb{R}^n$ motsvarar normen inducerad från standardskälärprodukten

$$\|x\|_2 := \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} = \sqrt{x \cdot x} \quad \text{(2-normen).}$$

- Det finns många andra normer på $\mathbb{R}^n$ som inte är inducerad från någon skalärprodukt

$$\|x\|_1 := \sum_{i=1}^{n} |x_i|, \qquad \|x\|_\infty := \max_{i=1,2,\ldots,n} |x_i|.$$

- Varje vektornorm inducerar en norm på rummet $\mathbb{R}^{m\times n}$:

$$\|A\|_1 := \sup_{x\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}} \frac{\|Ax\|_1}{\|x\|_1}, \quad \|A\|_2 := \sup_{x\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2}, \quad \ldots$$

- Viktiga egenskaper (gäller för alla tre matrisnormerna ovan):

$$\|Ax\| \leq \|A\|\|x\|, \qquad \text{och } A^T A = I \implies \|A\|_2 = 1.$$

Ortogonalitet, ON-bas

- Om $\langle u, v\rangle = 0$ för $u, v \in V$ så är vektorerna **ortogonala**.
- En mängd normerade vektorer $u_1, \ldots, u_n \in V$ kallas en **ON-mängd** om de är parvis ortogonala $\langle u_i, u_j\rangle = \delta_{ij}$ och en **ON-bas** om vektorerna även spänner upp V.
- Ex $\{(1,-1)/\sqrt{2}, (1,1)/\sqrt{2}\}$ och $\{(1,0),(0,1)\}$ är två olika ON-baser för $\mathbb{R}^2$.

Egenskaper §2.3:

- En ON-mängd $e_1, \ldots, e_n$ är linj. oberoende. Bevis:

$$\sum_i x_i e_i = 0 \iff \langle \sum_i x_i e_i, e_k\rangle = \langle 0, e_k\rangle \quad \forall k \iff x_k = 0 \quad \forall k.$$

- Om $\mathcal{E} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ är en ON-bas för V så gäller

$$u = \langle e_1, u\rangle e_1 + \langle e_2, u\rangle e_2 + \ldots \langle e_n, u\rangle e_n =: \mathrm{Proj}_V(u).$$

$$\text{mao } [u]_{\mathcal{E}} = (\langle e_1, u\rangle, \langle e_2, u\rangle, \ldots, \langle e_n, u\rangle) \in \mathbb{R}^n$$

Basbyte mellan ON-baser, ortogonala matriser

- Låt $\mathcal{E}$ vara ON-basen för V ovan. Då bevarar motsvarigheten $[u]_{\mathcal{E}} = x \in \mathbb{R}^n$ skalärprodukten. Bevis

$$\langle u, v\rangle = \langle \sum_{i=1}^{n} x_i e_i, \sum_{j=1}^{n} y_j e_j\rangle = \sum_{i,j=1}^{n} x_i y_j \underbrace{\langle e_i, e_j\rangle}_{\delta_{ij}} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = x \cdot y = [u]_{\mathcal{E}} \cdot [v]_{\mathcal{E}}. \qquad (1)$$

- Låt $\mathcal{E}'$ vara en annan ON-bas för V. Då har vi koordinatrelationen

$$x = [u]_{\mathcal{E}} = T_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{E}'}[u]_{\mathcal{E}'} = Tx', \qquad \text{var} \quad T_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{E}'} = [e_1'\, e_2' \dots e_n']_{\mathcal{E}}.$$

- **Resultat:** $T = T_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{E}'}$ är en ortogonalmatris, dvs $T^T T = I$.

  Bevis: Skriv $T = [t_1\, t_2 \dots t_n]$. Då är T ortogonal omm $t_i \cdot t_j = \delta_{ij}$. och då $t_i = [e_i']_{\mathcal{E}}$ och motsvarigheten $[\cdot]_{\mathcal{E}}$ bevarar skalärprodukten, cf. (1), får vi,

$$t_i \cdot t_j = \langle e_i', e_j'\rangle = \delta_{ij}.$$

- Slutsats:

$$x = Tx' \quad \text{och } x' = T^{-1}x = T^T x.$$

Gram-Schmidt ortogonaliseringsmetod (process)

Antag $a_1, \dots a_n$ är bas för V. GS-metoden bildar ON-Bas $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_n\}$ genom följande operationer:

$$
\begin{aligned}
u_1 &= a_1, & e_1 &= \frac{u_1}{\|u_1\|} \qquad (2)\\
u_2 &= a_2 - \langle e_1, a_2 \rangle e_1, & e_2 &= \frac{u_2}{\|u_2\|} \qquad (3)\\
&\vdots & &\vdots \qquad (4)\\
u_n &= a_n - \sum_{j=1}^{n-1} \langle e_j, a_n \rangle e_j, & e_n &= \frac{u_n}{\|u_n\|}. \qquad (5)
\end{aligned}
$$

Konsekvens: Varje ändligdimensionellt linjärt rum V har en ON-bas.

Kompakt QR-faktorisering

- Låt $\mathcal{E}$ vara ON-basen bildat med GS-metoden från basen $a_1, \ldots, a_n$ ovan där vi nu antar att $a_1, \ldots a_n \in \mathbb{R}^n$, och betrakta rang n matrisen $A = [a_1 \ldots a_n] \in \mathbb{R}^{m\times n}$.
- Då $a_k \in \mathrm{Span}(e_1, \ldots, e_k)$ gäller

$$a_k = \mathrm{Proj}_{\mathrm{Span}(e_1,\ldots,e_k)}(a_k) = \sum_{j=1}^{k} \langle e_j, a_k \rangle e_j \quad \forall k.$$

$$a_k = [e_1 \ldots e_n] \begin{bmatrix} \langle e_1, a_k \rangle & \langle e_2, a_k \rangle & \ldots & \langle e_k, a_k \rangle & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix}^T \quad k = 1, 2, \ldots, n$$

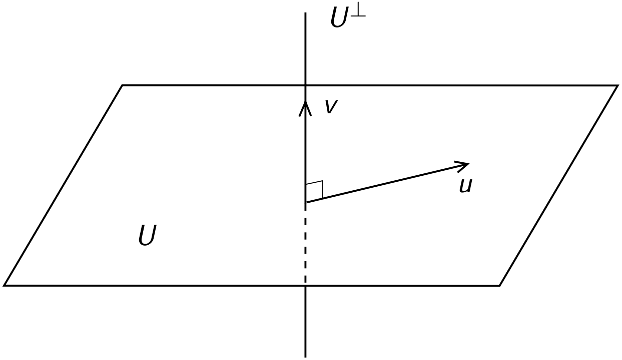
Det ger

$$A = [a_1 \ldots a_n] = \underbrace{[e_1 \ldots e_n]}_{=Q_1} \underbrace{\begin{bmatrix} \langle e_1, a_1 \rangle & \langle e_1, a_2 \rangle & \ldots & \langle e_1, a_n \rangle \\ 0 & \langle e_2, a_2 \rangle & \ldots & \langle e_2, a_n \rangle \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & \langle e_n, a_n \rangle \end{bmatrix}}_{=R}$$

- Kompakt QR-faktorisering: $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ med $m \geq n$ och Rang $(A) = n$ kan skrivas $A = Q_1 R$ där $Q_1 \in \mathbb{R}^{m\times n}$ och $R \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

- Om U är underrum av V definieras ortogonala komplementet till U (relativt till V) som

$$U^{\perp} = \{v \in V \mid \langle v, u \rangle = 0 \quad \forall u \in U\}.$$



Figur: Ortogonalt komplement.

Ortogonala komplementet

- Om U är underrum av V definieras ortogonala komplementet till U (relativt till V) som

$$U^{\perp} = \{v \in V \mid \langle v, u \rangle = 0 \quad \forall u \in U\}.$$

Egenskaper:

- $U^{\perp}$ är ett underrum av V.
- (Sats 2.8 + Lemma 2.1) Om $\dim(U) = k < \infty$, så gäller $V = U \oplus U^{\perp}$. Dvs varje $u \in V$ representeras entydigt som

$$u = u' + u'', \quad \text{där} \quad u' \in U, \quad u'' \in U^{\perp}$$

och för godtycklig ON-bas $e_1, \ldots, e_k$ för U gäller

$$u' = \sum_{j=1}^{k} \langle e_j, u \rangle e_j = \mathrm{Proj}_U(u).$$

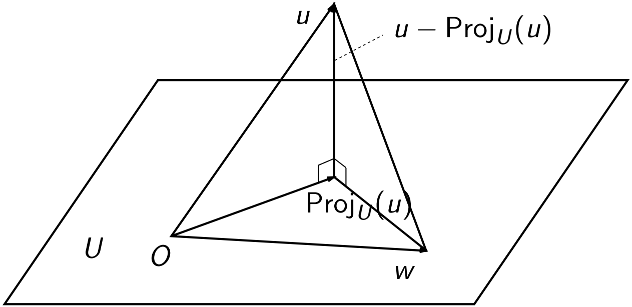
Projektionsapprox

Låt $u \in V$ och låt U vara underrum till V

- (Följd av sats 2.7) Om direktsummauppdelningen $V = U \oplus U^{\perp}$ gäller (t ex om $\dim(U) = k < \infty$) så är

$$\|u - \mathrm{Proj}_U(u)\| \leq \|u - w\| \quad \forall w \in U$$

och (Lemma 2.1) $\mathrm{Proj}_U(u) \in U$ är entydigt minimeringselement.



Projektionsapprox

Låt $u \in V$ och låt U vara underrum till V

- (Följd av sats 2.7) Om direktsummauppdelningen $V = U \oplus U^{\perp}$ gäller (t ex om $\dim(U) = k < \infty$) så är

  $$\|u - \mathrm{Proj}_U(u)\| \leq \|u - w\| \quad \forall w \in U$$

  och (Lemma 2.1) $\mathrm{Proj}_U(u) \in U$ är entydigt minimeringselement.

  Bevis: För godtycklig $w \in U$,

  $$\begin{aligned}\|u - w\|^2 &= \|\underbrace{(u - \mathrm{Proj}_U(u))}_{\in U^{\perp}} + \underbrace{(\mathrm{Proj}_U(u) - w)}_{\in U}\|^2 \\ &= \|u - \mathrm{Proj}_U(u)\|^2 + \|\mathrm{Proj}_U(u) - w\|^2 \geq \|u - \mathrm{Proj}_U(u)\|^2.\end{aligned}$$

  Vi använt att $u - \mathrm{Proj}_U(u) \perp \mathrm{Proj}_U(u) - w$ och Pythagoras sats.

- tillämpning: MK-metoden, uppg. 2.39 som Johannes löste i storgruppsövningen.

Fyra fundamentala underrum

Till en matris $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ associeras fyra fundamentala underrum (§2.11):

$$N(A) = V(A^T)^\perp \qquad N(A)^\perp = V(A^T) \tag{6}$$

$$N(A^T) = V(A)^\perp \qquad N(A^T)^\perp = V(A). \tag{7}$$

Bevis (6): Skriv $A = [a_1 \dots a_n]$ och $A^T = [a'_1 \dots a'_m]$ dvs $a'_k = (A_{k1}, A_{k2}, \dots, A_{kn}) \in \mathbb{R}^n$ (kolonnvektor). Då är

$$Ax = \begin{bmatrix} a'_1 \cdot x \\ a'_2 \cdot x \\ \vdots \\ a'_m \cdot x \end{bmatrix}.$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad N(A) &= \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = 0\} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid a'_k \cdot x = 0 \quad \forall k \in [1, m]\} \\ &= \left(\operatorname{Span}(a'_1, \dots, a'_m)\right)^\perp = V(A^T)^\perp. \end{aligned}$$

För direktsummarummet $\mathbb{R}^m = V(A) \oplus V(A)^\perp$ gäller $(V(A)^\perp)^\perp = V(A)$ (från Lemma 2.2) och det följer att $N(A)^\perp = V(A^T)$.

Fyra fundamentala underrum

Till en matris $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ associeras fyra fundamentala underrum (§2.11):

$$N(A) = V(A^T)^\perp \qquad N(A)^\perp = V(A^T) \tag{6}$$
$$N(A^T) = V(A)^\perp \qquad N(A^T)^\perp = V(A). \tag{7}$$

Bevis (7): Använd resultatet (6) på matrisen A^T:

$$N(A^T) = V(A)^\perp, \quad N(A^T)^\perp = V(A).$$

Tillämpning: (rangsatsen)

$$\begin{aligned}
\text{radrang} &= \dim(V(A^T)) = \dim(V(A^T) \oplus V(A^T)^\perp) - \dim(V(A^T)^\perp) \\
&= n - \dim(V(A^T)^\perp) \overset{(6)}{=} n - \dim(N(A)) \\
&= \dim(V(A)) = \text{kolonnrang}
\end{aligned}$$

Minsta kvadratmetoden

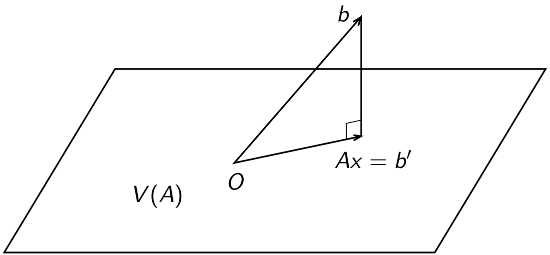
Definition: För $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ och ekvationen

$$Ax = b \tag{8}$$

finns det inte exakt lösning om $b \notin V(A)$.

MK-lösning: $x \in \mathbb{R}^n$ är en lösning till (9) i MK-metodens mening om

$$\|b - Ax\| \le \|b - Ay\| \quad \forall y \in \mathbb{R}^n.$$



Figur: Bästa approximation av b.

Minsta kvadratmetoden

Definition: För $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ och ekvationen

$$Ax = b \tag{9}$$

finns det inte exakt lösning om $b \notin V(A)$.

MK-lösning: $x \in \mathbb{R}^n$ är en lösning till (9) i MK-metodens mening om

$$\|b - Ax\| \leq \|b - Ay\| \quad \forall y \in \mathbb{R}^n.$$

Vi vet att

$$\|b - \mathrm{Proj}_{V(A)}(b)\| \leq \|b - w\| \quad \forall w \in V(A),$$

och att $\mathrm{Proj}_{V(A)}(b) \in V(A)$ är entydigt minimeringselement.
MK-problemets lösning:

(1) Beräkna $b' = \mathrm{Proj}_{V(A)}(b)$.

(2) Lös $Ax = b'$.

Resultat (§2.12): Det finns minst en MK-lösning (ty $b' \in V(A)$) och att MK-lösningen är unik omm $\operatorname{Rang}(A) = n$.
På grund av att $b - b' \in V(A)^{\perp}$ är x MK-lösning omm

$$Ax = b' \iff b - Ax \in V(A)^{\perp} \iff b - Ax \in N(A^T) \iff A^T(b - Ax) = 0.$$

Dvs x löser normalekvationerna $A^T Ax = A^T b$.

Linjär Algebra kapitel 3

Matrisen för avbildning

- Låt U och V vara (reella) linjära rum med respektive baser $\mathcal{B} = \{b_1, \dots, b_n\}$ och $\mathcal{C} = \{c_1, \dots, c_m\}$.
- Låt $F : U \to V$ vara linjär avbildning.
- För $u \in U$ med motsvarande $F(u) = v \in V$, betecknar vi koordinaterna i respektive baser $\mathbb{R}^n \ni x = [u]_{\mathcal{B}}, \quad \text{och} \quad [v]_{\mathcal{C}} = y \in \mathbb{R}^m$.
- Då gäller:

$$y = [v]_{\mathcal{C}} = [F(u)]_{\mathcal{C}} = \left[F(\sum_{i=1}^{n} x_i b_i) \right]_{\mathcal{C}} = \sum_{i=1}^{n} x_i [F(b_i)]_{\mathcal{C}}$$
$$= [F(b_1)\, F(b_2) \dots F(b_n)]_{\mathcal{C}} x = Ax$$

- Matrisen $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ kallas för matrisen till F i baserna $\mathcal{B}$ och $\mathcal{C}$.
- Om $U = V$ och $\mathcal{B} = \mathcal{C}$ kallas $A = [F(b_1)\, F(b_2) \dots F(b_n)]_{\mathcal{B}} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ matrisen till F i basen $\mathcal{B}$.
- **Tillämpning:** Man kan arbeta i Euklidiska vektorrum:

$$F(u) = v \iff [F(u)]_{\mathcal{C}} = [v]_{\mathcal{C}} \iff Ax = y.$$

Exempel

Låt $U = V = \mathcal{P}_2$ med standardbasen $\mathcal{B} = \{1, t, t^2\}$. Låt

$$F(p)(t) := p''(t) + tp'(t) + p(1)$$

vara linjära avbildning på $\mathcal{P}_2$. Bestäm matrisen till F i basen $\mathcal{B}$ och bestäm $N(F)$.

Lösning:

$$F(1) = 1, \quad F(t) = t + 1, \quad \text{och} \quad F(t^2) = 2t^2 + 3$$

ger

$$A = [F(1)\, F(t)\, F(t^2)]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Då

$$F(u) = 0 \iff Ax = 0$$

och $\det(A) = 2 \neq 0$ så är $N(A) = \{0\}$ och

$$N(F) = [N(A)]_{\mathcal{B}}^{-1} = [\{0\}]_{\mathcal{B}}^{-1} = \{0\}.$$

- Låt $F : V \to V$ och låt $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_n\}$, $\mathcal{E}' = \{e'_1, \dots, e'_n\}$ vara två baser för V.
- Vad är relationen mellan

$$A = [F(e_1) \dots F(e_n)]_{\mathcal{E}} \quad \text{och} \quad A' = [F(e'_1) \dots F(e'_n)]_{\mathcal{E}'} \qquad ?$$

- För $u \in V$ och $v = F(u)$ betecknar vi koordinaterna

$$x = [u]_{\mathcal{E}}, \quad y = [v]_{\mathcal{E}}$$

och

$$x' = [u]_{\mathcal{E}'}, \quad y' = [v]_{\mathcal{E}'}.$$

- Det ger

$$y = [v]_{\mathcal{E}} = [F(u)]_{\mathcal{E}} = Ax \quad \text{och} \quad y' = A'x'.$$

- Om vi använder relationen

$$x = Tx' \text{ och } y = Ty' \quad \text{där} \quad T = T_{\mathcal{E} \leftarrow \mathcal{E}'}$$

får vi att (Sats 3.2):

$$Ty' = y = Ax = ATx' \implies y' = T^{-1}ATx' \implies A' = T^{-1}AT.$$

Def 3.2: Två kvadratiska matriser A och A' för vilka det finns en inverterbar matris T av samma storlek så att

$$A' = T^{-1}AT$$

kallas **similära**.

Egenskaper:

- $$\det(A') = \det(A).$$
- Diagonaliserbara matriser är similära med en diagonalmatris.

Linjär Algebra kapitel 4

- Låt V vara ett komplext linjär rum och $F : V \to V$ linj. avb.
- **Def 4.1:** Ett tal $\lambda \in \mathbb{C}$ kallas ett **egenvärde** till F om det finns en $u \in V \setminus \{0\}$ sådan att
$$F(u) = \lambda u. \tag{10}$$
Varje $u \neq 0$ som uppfyller (10) kallas en **egenvektor** till λ.
Egenrummet
$$E(\lambda) = \{u \in V \mid F(u) = \lambda u\}$$
är ett underrum av V.
- Om $\mathcal{E} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ är en bas för V gäller
$$F(u) = \lambda u \iff [F(u)]_{\mathcal{E}} = \lambda[u]_{\mathcal{E}} \iff Ax = \lambda x$$
där $A = [F(e_1) \ldots F(e_n)]_{\mathcal{E}}$ och $x \in \mathbb{C}^n$.
- I fortsättningen studerar vi linjära avbildningar $F : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ på formen $F(x) = Ax$ där $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

Beräkning av egenvärden

- (§4.1): λ är egenvärde till A omm $\det(A - \lambda I) = 0$.
- (§4.2) Om A och A' är similära har samma egenvärden. **Konsekvens:** Oberoende av basrepresentation, har matrisen till F samma egenvärden.
- **Def 4.2:**
$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$$
är det **karakteristiska polynomet** till A och rötterna till **karakteristiska ekvationen**
$$p_A(\lambda) = 0$$
är egenvärdena till A.

Exempel:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -3 \end{bmatrix} \text{ ger } p_A(\lambda) = \det \begin{bmatrix} 2-\lambda & -1 \\ 4 & -3-\lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 - \lambda - 2$$

med egenvärden $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 1$. Egenvektor $x_1 \in E(\lambda_1) \setminus \{0\}$ hittar vi genom att lösa

$$(A - \lambda_1 I)x_1 = 0 \quad \text{t ex} \quad x_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}, \text{ och för } (A - \lambda_2 I)x_2 = 0 \quad \text{t ex} \quad x_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Egenskaper för karakteristiska polynom och egenvärden

- Genom utveckling för matrisen $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$,

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = (-1)^n\lambda^n + (-1)^n\left(\sum_{k=1}^n a_{kk}\right)\lambda^{n-1} + \cdots + \det(A). \quad (11)$$

- Motivation: Endast $\prod_{k=1}^n (a_{kk} - \lambda)$ ger bidrag till koefficienterna framför λ^n och λ^{n-1} och $p_A(0) = \det(A)$.
- Polynomet $p_A(\lambda)$ har n rötter som vi betecknar $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Då gäller

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) &= (-1)^n(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)\ldots(\lambda - \lambda_n) \\ &= (-1)^n\lambda^n + (-1)^n\left(\sum_{k=1}^n \lambda_k\right)\lambda^{n-1} + \cdots + \prod_{k=1}^n \lambda_k. \end{aligned} \quad (12)$$

- Jämföring av (11) och (12) ger

$$\prod_{k=1}^n \lambda_k = \det(A) \quad \text{och} \quad \sum_{k=1}^n \lambda_k = \sum_{k=1}^n a_{kk}.$$

Algebraisk och geometrisk multiplicitet

Def 4.3: Den **algebraiska multipliciteten** för ett egenvärde λ till matrisen A är multipliciteten av λ som rot till ekvationen $p_A(\lambda) = 0$. Vi skriver $m_a(\lambda)$.

Den **geometriska multipliciteten** för egenvärdet λ är definierad som

$$m_g(\lambda) = \dim E(\lambda).$$

Lemma 4.1: Om λ är ett egenvärde till A så gäller att $m_g(\lambda) \leq m_a(\lambda)$.

Exempel: Matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

ger $p_A(\lambda) = (3-\lambda)^2$ som ger egenvärdet $\lambda = 3$ med $m_a(3) = 2$ medan $E(3) = \mathrm{Span}((1,0))$ och $m_g(3) = 1$.

Om $m_g(\lambda) < m_a(\lambda)$ för ett egenvärde kallas det defekt.

Sats 4.5: Om $n \times n$ matrisen A har n linjärt oberoende egenvektorer $e_1, \ldots, e_n$ med tillhörande egenvärden $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Då gäller att inget egenvärde är defekt och

$$T^{-1}AT = D$$

där $T = [e_1\ e_2 \ldots e_n]$ och $D = \text{diag}([\lambda_1\ \lambda_2\ \ldots\ \lambda_n])$
Bevis (av diagonaliseringen): Från ovan har vi

$$AT = [Ae_1\ Ae_2\ \ldots\ Ae_n] = [\lambda_1 e_1\ \lambda_2 e_2\ \ldots\ \lambda_n e_n] = TD.$$

Def 4.4: Om A är similär med en diagonalmatris kallas A diagonaliserbar.

Matrisen A är diagonaliserbar omm inget egenvärde är defekt (§4.8). Specialfall:

- Om A har n olika egenvärden (§4.6 ger att olika egenvärden har motsvarande egenvektorer som är linj. oberoende).
- Om $A = A^T$ (spektralsatsen).

Här på symmetriska matriser, se boken för symmetriska linj. avb. $\langle F(u), v\rangle = \langle u, F(v)\rangle$.

- En matris $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ är symmetrisk om $A^T = A$.
- **§4.10:** Om $A = A^T$ så är alla egenvärdena reella.
  Bevis:
  $$Ax = \lambda x \implies \left\{ \begin{array}{l} \overline{x}^T Ax = \lambda \overline{x}^T x \\ \overline{(Ax)}^T x = \overline{\lambda}\overline{x}^T x \implies \overline{x}^T Ax = \overline{\lambda}\overline{x}^T x \end{array} \right\} \implies \overline{\lambda} - \lambda = 0,$$
  (ty $\overline{x}^T x = \sum_{k=1}^n |x_k|^2 > 0$.)
- **Konsekvens:** Det finns reella egenvektorer till egenvärdena till symmetriska matriser A, så vi begränsar oss till att studera matrisavbildningar på reella vektorrummet $\mathbb{R}^n$ med standardskalärprodukten.
- **§4.11 (för matriser):** Egenvektorer hörande till olika egenvärden av den symmetriska matrisen A är ortogonala.
  Bevis: För $Ax_1 = \lambda_1 x_1$ och $Ax_2 = \lambda_2 x_2$ där $\lambda_1 \neq \lambda_2$ gäller att

$$\lambda_1 x_2^T x_1 = x_2^T Ax_1 = (Ax_2)^T x_1 = \lambda_2 x_2^T x_1 \implies (\lambda_1 - \lambda_2)x_2^T x_1 = 0 \implies x_2^T x_1 = 0.$$

Om $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ är symmetrisk **så finns** en ON-bas $\mathcal{E} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ bestående av egenvektorer till A så att

$$T^T A T = D,$$

där matrisen $T = [e_1\ e_2\ \ldots\ e_n]$ (givetvis) är ortogonal och $D = \mathrm{diag}([\lambda_1\ \lambda_2\ \ldots\ \lambda_n])$ med $Ae_k = \lambda_k e_k$ för $k = 1, 2, \ldots, n$.

Tillämpning av diagonalisering 1:

Om $A = TDT^{-1}$ kan vi enkelt beräkna att $A^k = TD^kT^{-1}$ för alla $k \in \mathbb{N}$.

Kan användas t ex till att studera evolutionen till differensekvationer

$$x_{n+1} = Ax_n \quad n \geq 0$$

dvs

$$x_n = A^n x_0.$$

Tillämpning av diagonalisering 2:

Diagonalisering förenklar lösandet av linjära ODE på formen

$$x'(t) = Ax(t) \quad t > 0$$
$$x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n.$$

1. Om vi antar $A = TDT^{-1}$ med $T = [b_1\, b_2 \dots b_n]$ och $D = \mathrm{diag}([\lambda_1\, \lambda_2\, \dots\, \lambda_n])$ så gäller att $T^{-1}x' = DT^{-1}x$.
2. Definiera $y(t) = T^{-1}x(t)$, som enligt ovan löser
$$y'(t) = Dy(t) \quad \text{dvs} \quad y_1' = \lambda_1 y_1, \quad y_2' = \lambda_2 y_2, \dots, y_n' = \lambda_n y_n.$$
3. Lösning: $y_1(t) = c_1 e^{\lambda_1 t}, \dots, y_n(t) = c_n e^{\lambda_n t}$, som ger
$$x(t) = Ty(t) = T \begin{bmatrix} c_1 e^{\lambda_1 t} \\ \vdots \\ c_n e^{\lambda_n t} \end{bmatrix}$$
4. vektorn $c = (c_1, \dots, c_n) = y(0)$ bestäms genom begynnelsevillkoren:
$$Tc = Ty(0) = x(0) = x_0 \implies c = T^{-1}x_0.$$

Exempel:

$$x' = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} x \qquad t > 0 \qquad x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

1. (Diagonalisering av matrisen)

$$A = T \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix} T^T, \quad \text{där} \quad T = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$$

2. (Lös “diagonalproblem”)

$$y' = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix} y \implies y(t) = \begin{bmatrix} c_1 e^{5t} \\ c_2 e^{-5t} \end{bmatrix}$$

3. (Lös x från y)

$$Tc = Ty(0) = x(0) \implies c = T^T \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{bmatrix} 5 \\ -5 \end{bmatrix}$$

$$x(t) = Ty(t) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 3e^{5t} - e^{-5t} \\ e^{5t} + 3e^{-5t} \end{bmatrix}.$$

Numerisk Analys kapitel 1

Viktiga begrepp och definitioner

- Absoluta och relativa felet.
- Första ordnings felfortplantningsapproximation för ett problem med algoritm $f : I \to \mathbb{R}$

$$|\delta f(x)| = |f(x + \delta x) - f(x)| \lesssim |f'(x)||\delta x|.$$

  och för $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ med Jacobian J:

$$\|\delta f(x)\| = \|f(x + \delta x) - f(x)\| \lesssim \|J(x)\|\|\delta x\|$$

- Stabilitet för problem (exakta algoritmer) och approximativa algoritmer.
- Maskintalet $\mu = 0.5 \cdot \beta^{1-t}$ och dess relation till flyttalsrepresentation

$$fl(x) = x(1 + \delta) \quad \text{för något} \quad |\delta| \leq \mu.$$

  ($\mu = 2^{-53}$ för Double 64).

Konditionstal

Ett problem med algoritm f är stabil/välkonditionerad om konditionstalet är litet. Tumregelsdefinition av konditionstalet till f (det vi i praktiken vill veta)

$$\kappa(x) = \frac{\|\text{Relativfel utdata}\|}{\|\text{Relativfel indata}\|} = \frac{\|f(x+\delta x) - f(x)\|/\|f(x)\|}{\|\delta x\|/\|x\|}$$

Exempel: $Ax = b$, där A är inverterbar. Algoritm $x[b] := A^{-1}b$.

1. Störning i indata $b + \delta b$, leder till problem $Ax = b + \delta b$ med utdata $x[b+\delta b] = A^{-1}(b + \delta b)$.
2. Utdatafelet:
$$\delta x = x[b+\delta b] - x[b] = A^{-1}(b+\delta b) - A^{-1}b = A^{-1}\delta b$$
3. Genom $\|b\|_2 = \|Ax\|_2 \leq \|A\|_2\|x\|_2$ och $\|A^{-1}\delta b\|_2 \leq \|A^{-1}\|_2\|\delta b\|_2$ får vi matrisens konditionstal för 2-normen:

$$\kappa_2 = \frac{\|\delta x\|_2/\|x\|_2}{\|\delta b\|_2/\|b\|_2} = \frac{\|A^{-1}\delta b\|_2\|Ax\|_2}{\|x\|_2\|\delta b\|_2} \leq \frac{\|A^{-1}\|_2\|\delta b\|_2\|A\|_2\|x\|_2}{\|x\|_2\|\delta b\|_2} = \|A^{-1}\|_2\|A\|_2.$$

Bakåtstabilitet

- Ett problem (med (exakt) algoritm f) är stabilt om relativt små förändringar i indata ger relativt små förändringar i utdata.
- Definitionen: En numerisk/approximativ algoritm $\hat{f} \approx f$ sägs vara stabil i "indatapunkten" $x \neq 0$ om relativa bakåtfelets storlek

$$\frac{\|f^{-1}(\hat{f}(x)) - x\|}{\|x\|}$$

  är litet.
- Med andra ord, $\hat{f}$ är stabil om $\hat{f}(x)$ är exakta lösningen till nästan rätt problem $(f(\hat{x}))$.

Exempel (N Sektion 5.7) Gausselimination med pivotering och flyttalsaritmetik leder till approximativ algoritm

$$\hat{x}(A) = (A + \delta A)^{-1} b, \quad \text{där (typisk)} \quad \frac{\|\delta A\|}{\|A\|} = \mathcal{O}(\mu).$$

Approximativa algoritmen löser problemet $\hat{A}\hat{x} = b$, jämför med exakta algoritmen $x(A) = A^{-1} b$ som löser $Ax = b$.
Observation: Om vi väljer $\tilde{A} = A + \delta A$ följer det att

$$\hat{x}(A) = x(\tilde{A}) \quad \text{och} \quad \frac{\|\tilde{A} - A\|}{\|A\|} = \frac{\|\delta A\|}{\|A\|} = \mathcal{O}(\mu).$$

Med andra ord, approximativa algoritmen är stabil.

Numerisk Analys kapitel 2

Iterationsmetoder 1D

Problem: Önskar att hitta en rot $\hat{x}$ till ekvationen $f(x) = 0$ där $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ är icke-linjär funktion.

Iterationsmetod: Metod som iterativt genererar följd $x_1, x_2, \ldots$ som förhoppningsvis konvergerar mot $\hat{x}$.

Enkel/multipelrot: En rot $\hat{x}$ till $f(x) = 0$ kallas en enkelrot om $f'(\hat{x}) \neq 0$, och annars kallas den för en multipelrot.

Konvergensordning: Om följden x_k konvergerar mot $\hat{x}$ så är konvergensordningen definierad som största $q \geq 1$ sådan att

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|x_{k+1} - \hat{x}|}{|x_{k+1} - \hat{x}|^q} = C < \infty$$

för något $C > 0$. (Om $q = 1$ måste $C < 1$.)

Newtons metod

Algoritm: Startapprox x_0 och

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \qquad k = 0, 1, \ldots$$

Egenskaper: Lokalt konvergent med ordning 2 om $\hat{x}$ är enkelrot och 1 annars.
Metoden misslyckas om $f'(x_0) = 0$.

Exempel: Iteration ett steg för att lösa $x - e^{-x} = 0$ med $x_0 = 0.6$:

1. $$f'(x) = 1 + e^{-x}$$

2. $$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 0.6 - \frac{0.6 - e^{-0.6}}{1 + e^{-0.6}}$$

Sekantmetoden

Startapproximationer x_0, x_{-1} och

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)(x_k - x_{k-1})}{f(x_k) - f(x_{k-1})}, \qquad k = 0, 1$$

Motivation:

$$f'(x_k) \approx \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}.$$

Egenskaper: Lokalt konvergent med ordning $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ om $\hat{x}$ är enkelrot och ordning 1 annars. Metoden misslyckas om $f(x_k) = f(x_{k-1})$.

Fixpunktiteration

För att bestämma rötter till $f(x) = 0$, hitta en funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sådan att

$$x = g(x) \implies f(x) = 0.$$

Fixpunkt: En punkt x sådan att $x = g(x)$ kallas en fixpunkt till g. Enligt ovan är alla fixpunkter till g rötter till f.

Algoritm: Startapprox x_0 och

$$x_{k+1} = g(x_k) \qquad k = 0, 1, \ldots$$

Egenskaper: Fixpunktmetoden konvergerar lokalt mot en rot $\hat{x}$ om $|g'(\hat{x})| < 1$ med konv. ordning 1.

Obs! Det svåra är typisk att hitta en lämplig funktion g (försök genom omformulering av f).

System av icke-linjära ekvationer

Vi söker rötter till

$$f(x) = 0, \qquad \text{där} \quad f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \tag{13}$$

är icke-linjär funktion.

Newtons metod: Startapprox $x_0 \in \mathbb{R}^n$ och

$$x_{k+1} = x_k - J^{-1}(x_k)f(x_k), \quad k = 0, 1, \dots,$$

där $J : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n\times n}$ är Jacobianen till f.

Motivation, Newtons metod: Linjär approximation av $f(x)$ kring punkten x_k i ekv. (13) ger

$$f(x_k) + J(x_k)(x - x_k) = 0 \implies x = x_k - J^{-1}(x_k)f(x_k).$$

Egenskaper: Lokalt konvergent med ordning 2 vid roten $\hat{x}$ om $J(\hat{x})$ är inverterbar och 1 annars. Om $J(x_0)$ är singulär säger vi att metoden misslyckas.

Newtons metod forts

Alternativt skrivsätt algoritmen: är att introducera sökriktning s_k

$$\left.\begin{aligned} J(x_k)s_k &= -f(x_k) \\ x_{k+1} &= x_k + \alpha_k s_k \end{aligned}\right\} \quad k = 0, 1, \ldots$$

Motivationen är att bilda olika mer flexibla/robusta/effektiva metoder, t ex dämpad Newtons metod (med $\alpha_k < 1$).

Fixpunktiteration för system

Precis samma ide som i 1D: För att bestämma rötter till $f(x) = 0$, hitta en funktion $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^N$ sådan att

$$x = g(x) \implies f(x) = 0.$$

Obs! Alla fixpunkter till g rötter till f.

Algoritm: Startapprox $x_0 \in \mathbb{R}^n$ och

$$x_{k+1} = g(x_k) \qquad k = 0, 1, \ldots$$

Egenskaper: Fixpunktmetoden konvergerar lokalt mot en rot $\hat{x}$ om $\|g'(\hat{x})\| < 1$ med konv. ordning 1, för någon norm. (t ex 2-normen eller ∞-normen). (Se exempel 2.12).

Metodoboeroende feluppskattning

Låt $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$ vara en rot (och punkten) som iterationsföljden x_k konvergerar mot.

Om man önskar skatta felet vid iteration k kan man Taylorutveckla $f(x_k)$ kring roten $\hat{x}$:

$$f(x_k) = \underbrace{f(\hat{x})}_{=0} + J(\hat{x})(x_k - \hat{x}) + \mathcal{O}(\|x_k - \hat{x}\|) \approx J(x_k)(x_k - \hat{x}).$$

Som ger första ordningens feluppskattning

$$\|x_k - \hat{x}\| \approx \|J^{-1}(x_k)f(x_k)\|.$$

Numerisk Analys kapitel 3

Polynominterpolation

Antag att $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, att $x_i \in \mathbb{R}$ olika punkter och att vi känner

$$(x_i, f(x_i)) \quad i = 0, 1, \ldots, n.$$

Problem: Bestämma ett interpolationspolynom $p_n \in \mathcal{P}_n$ som går genom punkterna $(x_i, f(x_i))$. Dvs

$$p_n(x_i) = f(x_i) \quad \forall i = 0, 1, \ldots, n. \tag{14}$$

Newtons form: Vi skriver polynomet på formen

$$p_n(x) = c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)(x - x_1) + \ldots + c_n(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{n-1}) \tag{15}$$

Ekvationerna (14) och (15) leder till ekvationssystem

$$
\begin{aligned}
p_n(x_0) &= c_0 && = f(x_0) \\
p_n(x_1) &= c_0 + c_1(x_1 - x_0) && = f(x_1) \\
&\vdots && \vdots \\
p_n(x_n) &= c_0 + c_1(x_n - x_0) + \ldots + c_n \prod_{j=0}^{n-1}(x_n - x_j) && = f(x_n)
\end{aligned}
$$

Som motsvarar ekvationssystemet

$$
\underbrace{\begin{bmatrix}
1 & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\
1 & (x_1 - x_0) & 0 & \ldots & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\
1 & (x_{n-1} - x_0) & \ldots & \prod_{j=0}^{n-2}(x_{n-1} - x_j) & 0 \\
1 & (x_n - x_0) & \ldots & \prod_{j=0}^{n-2}(x_n - x_j) & \prod_{j=0}^{n-1}(x_n - x_j)
\end{bmatrix}}_{=A}
\underbrace{\begin{bmatrix} c_0 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}}_{c}
=
\underbrace{\begin{bmatrix} f(x_0) \\ \vdots \\ f(x_n) \end{bmatrix}}_{=b}
$$

Då $\det(A) = \prod_{i<j}^{n}(x_j - x_i) \neq 0$ är matrisen inverterbar. Interpolationspolynomet $p_n \in \mathcal{P}_n$ är entydigt med $c = A^{-1}b$.

Exempel:

Anpassa ett polynom $p_2 \in \mathcal{P}_2$ till värdena

x	0	1	3
$f(x)$	1	3	1

Lösning: Newtons form:

$$p_2(x) = c_0 + c_1(x-0) + c_2(x-0)(x-1)$$

och ekvationer

$$p_2(0) = 1 \implies c_0 = 1,$$

$$p_2(1) = 3 \implies c_0 + c_1 = 3 \implies c_1 = 2$$

och

$$p_2(3) = 1 \implies c_0 + 3c_1 + 6c_2 = 1 \implies c_2 = -1.$$

Trunkeringfel

"Trunkeringsfelssatsen för polynominterpolation": Låt $p_n \in \mathcal{P}_n$ vara interpolationspolynomet till $f \in C^{n+1}[a, b]$ genom punkterna $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$. Då gäller följande för $x \in [a, b]$

$$p_n(x) - f(x) = -\frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!}(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_n),$$

där $\xi(x) \in [a, b]$.

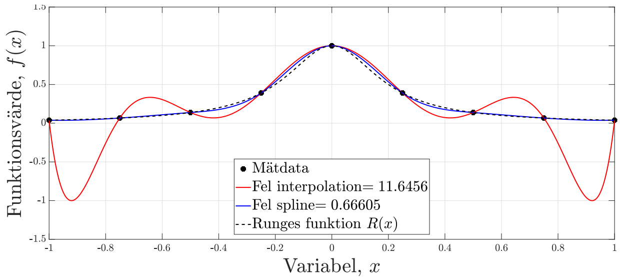
$$R_T := p_n(x) - f(x)$$

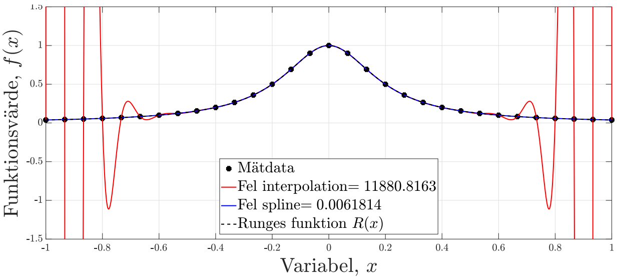
kallas för **trunkeringsfelet**

Tillämpning: Skatta approximationsfel. Till exempel, om $p_1 \in \mathcal{P}_1$ uppfyller $p_1(0) = f(0)$ och $p_1(1) = f(1)$ så gäller (se exempel 3.2)

$$\max_{x\in[0,1]} |p_1(x) - f(x)| \leq \max_{x\in[0,1]} \frac{|f''(x)|}{8}.$$

Runges fenomen $f(x) = (1 + 25x^2)^{-1}$.





Numerisk Analys kapitel 4

Trapetsregeln och -formeln

För en funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ser vi på numeriska metoder, dvs kvadraturformler, som approximerar integralen av f på följande sätt

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=0}^{n} f(x_i)w_i, \quad \text{där} \sum_{i=0}^{n} w_i = b - a.$$

- Trapetsregeln: approximationsintegral med interpolationspolynom $p_1 \in \mathcal{P}_1$ genom punkterna $(a, f(a))$ och $(b, f(b))$:

$$I = \int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b p_1(x)dx = (f(a) + f(b))\frac{(b-a)}{2}$$

- $|\text{Trunkeringsfelet}| \leq C \max_{x\in[a,b]} |f''(x)|(b-a)^3$ kan härledas genom skattning av $f(x) - p_1(x)$.

Trapetsregeln och -formeln

- Trapetsformeln: Trapetsregeln över varje intervall $[x_i, x_{i+1}]$ i punkter $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ med konstant steglängd $x_{i+1} - x_i = (b-a)/n = h$:

$$T(h) := \sum_{i=0}^{n} (f(x_i)h) - \frac{f(x_0) + f(x_n)}{2} h,$$

Trunkeringsfel: $|I - T(h)| \leq Ch^2 \max_{x \in [a,b]} |f''(x)|.$

Simpsons regel

- Approximationsintegral med interpolationspolynom $p_2 \in \mathcal{P}_2$ genom punkterna $(a, f(a))$, $((a+b)/2, f((a+b)/2))$ och $(b, f(b))$:

$$I = \int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b p_2(x)dx = \left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right]\frac{(b-a)}{6}.$$

- $|\text{Trunkeringsfelet}| \leq C \max_{x\in[a,b]} |f^{(4)}(x)|(b-a)^5$ kan härledas genom skattning av $f(x) - p_2(x)$.
- Simpsons formel: Simpsons regel över varje intervall $[x_{2k}, x_{2(k+1)}]$ punkter $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{2n} = b$ med konstant steglängd $h = \frac{(b-a)}{2n}$:

$$S(h) = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_{2i}}^{x_{2(i+1)}} p_{2,i}(x)\, dx = \frac{2h}{6} \sum_{i=0}^{n-1} \left[f(x_{2i}) + 4f(x_{2i+1}) + f(x_{2(i+1)})\right],$$

där $p_{2,i} \in \mathcal{P}_2$ är interpolationspolynomet genom f i punkterna x_{2i}, x_{2i+1} och $x_{2(i+1)}$, (faktorn $2h/6$ ovan pga $x_{2(i+1)} - x_{2i} = 2h$).

$$\text{Trunkeringsfel: } |I - S(h)| \leq Ch^4 \max_{x\in[a,b]} |f^{(4)}(x)|.$$

Numerisk Analys kapitel 5

Viktiga begrepp, resultat osv.

- **LU-faktorisering med och utan pivotering:**
- Stabilitet linj. ekv. system (redan repeterat).
- QR- och SVD-faktorisering.
- Algoritmer för beräkning av egenvärden: potensmetoden och invers iteration.

LU-faktorisering

- Antag att $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$.
- Genom elementära radoperationer leder Gausselimination till en trappstegsmatris $U \in \mathbb{R}^{m \times n}$ som är radekvivalent med A.
- Om inga radbyten gjorts gäller **LU-faktoriseringen av** A**:**

  $$A = LU,$$

  där $L \in \mathbb{R}^{m \times m}$ är nedåt triangulär.
- Om det gjordes radbyten i Gausseliminationen så finns en permutationsmatris $P \in \mathbb{R}^{m \times m}$ och en L av samma form som ovan sådana att **LU-faktoriseringen av** A **med pivotering** kan skrivas:

  $$PA = LU.$$

LU-faktorisering

- Lösning av $Ax = b$ med LU-faktorisering: $(m = n)$

$$
\begin{aligned}
Ly &= b \quad \text{(framåtsubstitution)}, \quad \textbf{beräkningskostnad: } \mathcal{O}(n^2), \\
Ux &= y \quad \text{(bakåtsubstitution)}, \quad \textbf{beräkningskostnad: } \mathcal{O}(n^2).
\end{aligned}
$$

jmf $Ax = b$ (Gausselimination) har beräkningskostnad $\mathcal{O}(n^3)$.

QR faktorisering

Om $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ med $m \geq n$ så finns en ortogonalmatris $Q \in \mathbb{R}^{m\times m}$ och en uppåt triangulär $\hat{R} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ sådana att

$$A = Q\hat{R} = Q \begin{bmatrix} R \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad (\textbf{full QR-faktorisering}),$$

där $R \in \mathbb{R}^{n\times n}$ är uppåt triangulär.

- Genom att skriva $Q = [Q_1\ Q_2]$ där $Q_1 \in \mathbb{R}^{m\times n}$ och $Q_2 \in \mathbb{R}^{m\times(m-n)}$ får vi

$$A = [Q_1\ Q_2] \begin{bmatrix} R \\ 0 \end{bmatrix} = Q_1 R \quad (\textbf{kompakt QR-faktorisering}),$$

- Om $\mathrm{Rang}\,(A) = n$ kan vi beräkna kompakt QR-faktorisering med Gram-Schmidts ortogonaliseringsmetod.

Tillämpningar: QR-iteration (egenvärdesberäkningar) och beräkning av minstakvadratlösningar.

QR-faktorisering och minstakvadratproblemet

Antag att $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ med $\text{Rang}\,(A) = n$ och, som ovan,

$$A = Q \begin{bmatrix} R \\ 0 \end{bmatrix} = [Q_1\; Q_2] \begin{bmatrix} R \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Problem: Vi söker minstakvadratlösningen till $Ax = b$
Resultat: x är MK-lösning till $Ax = b$ omm $Rx = Q_1^T b$.

Bevis: Använd att Q är ortogonal gäller $Q^T Q = I = QQ^T$ och

$$\|Qy\|_2^2 = y^T Q^T Qz = y^T y = \|y\|_2^2 \qquad \forall y \in \mathbb{R}^n.$$

Resultatet följer från

$$\begin{aligned}\|Ax - b\|_2^2 &= \left\| Q \begin{bmatrix} R \\ 0 \end{bmatrix} x - b \right\|_2^2 = \left\| Q \left(\begin{bmatrix} R \\ 0 \end{bmatrix} x - Q^T b \right) \right\|_2^2 \\ &= \left\| \begin{bmatrix} R \\ 0 \end{bmatrix} x - [Q_1\; Q_2]^T b \right\|_2^2 = \|Rx - Q_1^T b\|_2^2 + \|Q_2^T b\|_2^2\end{aligned}$$

SVD-faktorisering

För varje $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ finns en singulärvärdesfaktorisering

$$A = U\Sigma V^T = U.$$

- $U \in \mathbb{R}^{m \times m}$ och $V \in \mathbb{R}^{n \times n}$ båda är ortogonalmatriser
- Σ är en $m \times n$ matris som är nollskild endast längs huvuddiagonalen. T ex om $m > n$, så är

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1 & & & \\ & \sigma_2 & 0 & \\ & & \ddots & \\ & 0 & & \sigma_n \\ & & & \\ & & & \end{bmatrix}$$

där $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \ldots \geq \sigma_n \geq 0$ är singulärvärdena till A.

Specialfall: Om $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ är symmetrisk och positivt definit, så är $A = VDV^T$ matrisens SVD-faktoriseringen (med $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$).

Om Rang $(A) = r \leq n$ så finns endast r strikt positiva singulärvärden. **Kompakt SVD:**

$$A = [U_1 \; U_2] \begin{bmatrix} \Sigma_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1^T \\ V_2^T \end{bmatrix} = U_1 \Sigma_1 V_1^T$$

där $\Sigma_1 = \operatorname{diag}(\sigma_1, \ldots, \sigma_r) \in \mathbb{R}^{r \times r}$, $U_1 = [u_1 \ldots u_r] \in \mathbb{R}^{m \times r}$, $V_1 = [v_1 \ldots v_r] \in \mathbb{R}^{r \times n}$ osv

Man kan visa att om

$$x = V_1 \Sigma_1^{-1} U_1^T b \quad \text{så är } x \text{ MK-lösning till ekvationen} \quad Ax = b.$$

Moore-Penrose pseudoinvers: $A^+ := V_1 \Sigma_1^{-1} U_1^T$.

Konditionstal och trunkerad SVD

Konditionstalet $\kappa(A) = \|A\|_2 \|A^+\|_2 = \sigma_1/\sigma_r$, dvs största delat på minsta singulära värdet.

Trunkerad SVD: Rang r matrisen

$$A = \sum_{j=1}^{r} \sigma_j u_j v_j^T \quad \text{kan approximeras till rang } k < r \text{ av} \quad A_k := \sum_{j=1}^{k} \sigma_j u_j v_j^T .$$

- A_k är närmaste matris av rang k till matrisen A i 2-norm:

$$A_k \in \arg \min_{B \in \mathbb{R}^{n \times n} \text{ av rang K}} \|B - A\|_2.$$

- Trunkerad matris får bättre konditionstal (leder till mer stabila problem) ty $\kappa(A_k^+) = \sigma_1 \sigma_k^{-1} \leq \sigma_1 \sigma_r^{-1} = \kappa(A^+)$

Metod för beräkning av största egenvärdet i belopp till matrisen

$$A = VDV^{-1}, \quad \text{där} \quad V = [v_1\, v_2 \ldots v_n], \quad \text{och} \quad |\lambda_1| > |\lambda_2| \geq |\lambda_3| \geq \ldots.$$

Algoritm: Startvektor $x_0 \in \mathbb{R}^n$ och för $k = 0, 1, \ldots$

$$y_{k+1} = Ax_k$$
$$x_{k+1} = \frac{y_{k+1}}{\|y_{k+1}\|}$$

Villkor för att $x_k \to v_1$ när $k \to \infty$: måste ha $c_1 \neq 0$ i

$$x_0 = \sum_{i=1}^{n} c_i v_i.$$

Invers iteration: Beräkning av minsta egenvärdet i belopp med potensmetoden tillämpad på A^{-1}, men använd LU-faktorisering och ekvationslösning istället för A^{-1}.

Numerisk Analys kapitel 6

Ett begynnelsevärdesproblem (BVP) kan skrivas

$$\begin{aligned} y'(t) &= f(t, y(t)), \quad t > 0 \\ y(0) &= z \end{aligned} \tag{16}$$

där $f : [0, \infty) \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ och $z \in \mathbb{R}^m$.
Problemet (16) sägs vara **stabilt** om närliggande lösningskurvor inte divergerar.

Def: Stabilitet (specialfall): Ett linjärt BVP på formen

$$\begin{aligned} y' &= Ay \quad t > 0 \\ y(0) &= z \end{aligned} \tag{17}$$

där $A \in \mathbb{R}^{m \times m}$ sägs vara asymptotiskt stabilt om

$$\lim_{t \to \infty} y(t) = 0 \quad \text{för alla begynnelsevillkor} \quad z \in \mathbb{R}^m.$$

Resultat: Ett BVP på formen (17) är asymptotiskt stabilt omm $\mathrm{Re}(\lambda_k) < 0$ för alla egenvärden till A.

Följande approximationer av derivatan

$$y'(t) \approx \begin{cases} D_+ y(t;h) = \frac{y(t+h)-y(t)}{h} & \text{framåtdifferens} \\ D_- y(t;h) = \frac{y(t)-y(t-h)}{h} & \text{bakåtdifferens,} \end{cases}$$

har båda trunkeringsfel $|y'(t) - D_\pm y(t;h)| = \mathcal{O}(h)$ och kan användas till att konstruera respektive numeriska enstegsmetoder för att lösa (16):

- **Euler framåt:** Sätt $y_0 = z$ och för

$$y_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n), \qquad n = 0, 1, \dots$$

- **Euler bakåt:** Sätt $y_0 = z$ och för

$$y_{n+1} = y_n + hf(t_{n+1}, y_{n+1}) \qquad n = 0, 1, \dots$$

Ovan representerar $h > 0$ den numeriska metodens steglängd och $y_n \approx y(nh)$. Båda metoderna har lokalt trunkeringsfel $\mathcal{O}(h^2)$ och approximationsordning 1 (cf. föreläsning 22)

A-stabilitet

Antag att y är lösning till godtyckligt **stabilt** linjärt BVP på formen (17).

En metod är stabil för **en viss steglängd** $h > 0$ om den ger en ickeväxande approximation, dvs om tillväxtfaktorn $\dfrac{\|y_{k+1}\|}{\|y_k\|} \leq 1$.

Om metoden är stabil för alla steglängder $h > 0$ så är den numeriska metoden **A-stabil**.

För det endimensionella stabila testproblemet

$$y' = \lambda y \quad t > 0, \quad \text{med } \mathrm{Re}(\lambda) \leq 0, \quad \text{och } y(0) \in \mathbb{R},$$

kan man visa att

$$|y_{k+1}| = \begin{cases} |1 + h\lambda||y_k| & \text{för Euler framåt} \\ |1 - h\lambda||y_k| & \text{för Euler bakåt} \end{cases}$$

Slutsats: Euler framåtmetoden är stabil för alla $h > 0$ som uppfyller $|1 + h\lambda| \leq 1$
Euler bakåtmetoden är stabil för alla $h > 0$ som uppfyller

$$|1 - h\lambda| \geq 1 \implies \text{stabil för alla } h > 0 \implies \text{metoden är A-stabil.}$$

Stabilitet för numeriska metoder i fler dimensioner

För flerdimensionella testproblem på formen

$$\begin{aligned} y' &= Ay \qquad t > 0, \\ y(0) &= z \in \mathbb{R}^m \end{aligned}$$

med A diagonaliserbar, och stabilt problem dvs med $\mathrm{Re}(\lambda_k) \leq 0$ för alla egenvärdena till A.

- **Eulers bakåtmetod:** är A-stabil
- **Eulers framåtmetod:** är stabil för alla $h > 0$ så att

$$|1 + \lambda_k h| \leq 1 \qquad \forall k = 1, 2, \ldots, m.$$

Numerisk Analys kapitel 7

Minimeringsproblem:

$$\min f(x) \text{då} \begin{cases} g(x) = 0 \\ h(x) \leq 0 \end{cases} \tag{18}$$

- $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$– objektfunktion
- $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$– likhetsbivillkor
- $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$– olikhetsbivillkor

Vi betecknar det tillåtna området $X = \{x \in \mathbb{R}^n \mid g(x) = 0 \quad \text{och} \quad h(x) \leq 0\}$, och säger att $\hat{x} \in X$ är

- ett globalt minimum till (18) om
$$f(\hat{x}) \leq f(x) \quad \forall x \in X \setminus \{\hat{x}\}$$
och **strikt** globalt minimum om "$\leq$" ersätts med "$<$"
- ett lokalt minimum till (18) om
$$f(\hat{x}) \leq f(x) \quad \text{för alla tillåtna } x \text{ i en omgivning kring } \hat{x}.$$

Minimering utan bivillkor

Minimeringsproblem:

$$\min_{x\in\mathbb{R}^n} f(x) \tag{19}$$

(Del av LA Sats 4.18): Om $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$ är en kritisk punkt till f, dvs $\nabla f(\hat{x}) = 0$, så är $\hat{x}$ ett strikt lokal minimum till f om **Hessianen** $H(x) = J(\nabla f)(x)$ är positivt definit i punkten $\hat{x}$.

Minimering $n = 1$**:** Vi kan använda Newtons metod för att hitta kritiska punkter till f, dvs till att lösa ekvationen

$$f'(x) = 0$$

Algoritm: $x_0 \in \mathbb{R}$ startgissning och

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f'(x_k)}{f''(x_k)} \qquad k = 0, 1, \ldots$$

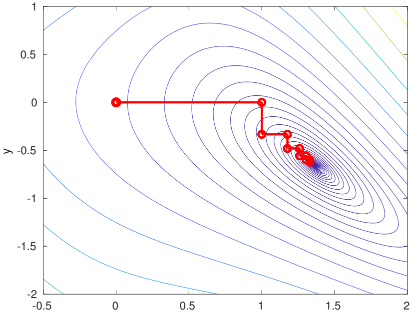
Steepest descentmetoden: Löser

$$\nabla f(x) = 0$$

med följande **sökmetod:** $x_0 \in \mathbb{R}^n$ startgissning och

$$\left.\begin{aligned} s_k &= -\nabla f(x_k) \\ x_{k+1} &= x_k + \alpha_k s_k \end{aligned}\right\} \quad k = 0, 1, \ldots$$

där $s_k = -\nabla f(x_k)$ är sökriktningen och $\alpha_k \in \mathbb{R}$ är steglängden.



Steepest descentmetoden med linjesöking: Löser

$$\nabla f(x) = 0$$

med följande **sökmetod:**
$x_0 \in \mathbb{R}^n$ startgissning och

$$\left.\begin{aligned} s_k &= -\nabla f(x_k) \\ x_{k+1} &= x_k + \alpha_k s_k \end{aligned}\right\} \quad k = 0, 1, \ldots$$

där s_k är sökriktningen och $\alpha_k \in \mathbb{R}$ är steglängden.

Descentriktning: n-vektorn s i x kallas en decsentriktning om det finns $\delta > 0$ så att

$$f(x + \alpha s) < f(x) \quad \forall \alpha \in (0, \delta),$$

och alla s så att $\nabla f(x) \cdot s < 0$ är descentrikninger i x.

Motivation steepest descent: Sökriktningen $s_k = -\nabla f(x_k)$ är den descentriktinigen i x_k som funktionen avtar snabbast i.

Flerdimensionell minimering

Steepest descentmetoden med linjesöking: Löser

$$\nabla f(x) = 0$$

med följande **sökmetod:**
$x_0 \in \mathbb{R}^n$ startgissning och

$$\left.\begin{aligned} s_k &= -\nabla f(x_k) \\ x_{k+1} &= x_k + \alpha_k s_k \end{aligned}\right\} \quad k = 0, 1, \ldots$$

där s_k är sökriktningen och $\alpha_k \in \mathbb{R}$ är steglängden.

Flerdimensionell minimering

Linjesöking: Given sökriktningen s_k bestäms steglängden α_k genom att lösa linjesökingsproblemet

$$\alpha_k = \arg\min_{\alpha} f(x_k + \alpha s_k). \tag{20}$$

Detta är ett endimensionellt minimeringsproblem som man t ex kan lösa, som ovan, med Newtons metod.

Specialfall: Om $f = \frac{1}{2}x^T Hx + b^T x + c$, (dvs om f är kvadratisk) så är lösningen till (20)

$$\alpha_k = \frac{-\nabla f(x_k) \cdot s_k}{s_k^T H s_k} = \frac{s_k^T s_k}{s_k^T H s_k}.$$