MATEMATISKA VETENSKAPER **TMA671 2018**
Chalmers tekniska högskola **Datum: 2018-05-28 kl. 14.00 - 18.00**
Examinator: Håkon Hoel **Tel: ankn 5381**
Hjälpmedel: inga

TMA 671 Linjär Algebra och Numerisk Analys

Tentan består av 8 uppgifter, med varierande antal deluppgifter.
Maximalt antal poäng är 60, och betygsgränserna är 30 för 3 (godkänd), 42 för 4 och 54 för 5. Upp till 10 bonuspoäng från bonusuppgifter får tillgodoräknas.
Renskriv dina lösningar, lämna ej in kladdpapper! Poängavdrag ges för dåligt motiverade, svårtolkade eller svårläsliga lösningar.
Tentan rättas och bedöms anonymt. Resultat meddelas via Ladok ca. tre veckor efter tentamenstillfället och granskning sker 2018-06-21 kl. 10-12 i rum MVL14, Chalmers tvärgata 3.

Obs ! Två små fel i tentan som gavs är rättad upp här i röd text.

---

1. Vi löser ekvationen $f(\boldsymbol{x}) = 0$ där $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ är definierad som

$$f(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} 2x_1^2 - x_2^2 \\ x_1^2 + x_2^2 - 1 \end{bmatrix}.$$

(Fetstil $\boldsymbol{x}$ används här för vektorer i fall där det behövs att skilja i-te komponent av vektorn, dvs x_i, från i-te iteration av vektorn, dvs $\boldsymbol{x}_i$.) Vi önskar approximera roten $\hat{\boldsymbol{x}} = (\sqrt{1/3}, \sqrt{2/3})$.

a) Beräkna Jacobianen $J : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ till funktionen f, och iterera ett steg med Newtons metod med startapproximationen $\boldsymbol{x}_0 = (0.5, 0.5)$. **(2p)**

b) Konstruera en fixpunktiterationsmetod $\boldsymbol{x}_{n+1} = g(\boldsymbol{x}_n)$ som konvergerar lokalt mot roten $\hat{\boldsymbol{x}}$. Iterera ett steg från startapproximationen $\boldsymbol{x}_0 = (0.5, 0.5)$, och verifiera att din fixpunktmetod uppfyller villkoren för lokal konvergens. **(4p)**

2. Låt $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ vara en funktion som uppfyller

x	0	1/3	2/3	1
$f(x)$	1	2/3	0	1

,

och

$$\max_{y\in[0,1]} |f^{(4)}(y)| \leq 8. \tag{1}$$

a) Använd Newtons form till att bestämma det polynom p_3 av grad högst 3, dvs $p_3 \in \mathcal{P}_3$, som går genom $(x_i, f(x_i))_{i=0}^3$ där $x_i = i/3$. **(3p)**

b) Approximera värdet till $f(5/6)$ och skatta approximationsfelet. **(2p)**

Det är känt att för $x \in [0, 1]$ så uppfyller interpolationspolynomet $p_3 \in \mathcal{P}_n$ följande:

$$f(x) - p_3(x) = \frac{f^{(4)}(\xi(x))}{4!}(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3),$$

för någon $\xi(x) \in [0, 1]$.

3. Låt $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ vara en inverterbar matris med LUP-faktorisering $PA = LU$.

a) Beskriv kort egenskaperna till matriserna L, U och P (dvs matrisernas storlek och ytterligare ett adjektiv om varje matris). **(1p)**

VÄND!

b) Beskriv hur det linjära ekvationssystemet $Ax = b$ kan lösas med LUP-faktorisering och ange beräkningskostnaden i antal flyttalsoperationer för att lösa $Ax = b$ med en redan LUP-faktoriserad matris A. **(2p)**

Tips: Beräkningskostnaden kan anges $\mathcal{O}(n^p)$ för någon $p \geq 1$.

c) LU faktorisera följande matris (utan pivotering) **(3p)**

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 4 & 7 & 3 \\ 1 & 4 & 2 \end{bmatrix}.$$

4. Vi betraktar matrisen $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

a) Visa att A är inverterbar om och endast om 0 inte är ett egenvärde till A. **(2p)**

b) Visa att om matrisen A är similär med B och B är similär med C, så är A similär med C. **(2p)**

c) Matrisen $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ kallas antisymmetrisk om $A^T = -A$. Visa att alla egenvärdena till en antisymmetrisk matris är imaginära (dvs $\mathrm{Re}(\lambda) = 0$ för alla egenvärden λ till A). **(3p)**

5. Vi betraktar linjära rummet $C[0, 1]$ med skärprodukten

$$\langle u, v \rangle := \int_0^1 u(t)v(t)\, t\, dt, \qquad \forall u, v \in C[0, 1],$$

och inducerade normen $\|u\| := \sqrt{\langle u, u \rangle}$.

a) Verifiera att $\langle \cdot, \cdot \rangle$ är en skalärprodukt. **(2p)**

b) Låt $\mathcal{P}_k$ för $k \in \mathbb{N}$ beteckna linjära rummet av polynom av grad högst k och låt $\mathcal{B}_k = \{1, t, \ldots, t^k\}$ beteckna standardbasen för $\mathcal{P}_k$. Använd Gram-Schmidts ortogonaliseringsmetod till att bilda en ON-bas $\{e_1, e_2\}$ för $\mathcal{P}_1$ från vektorerna i basen $\mathcal{B}_1$. **(3p)**

c) Bestäm polynomet $p(t) = at + b$ som minimerar integralen **(3p)**

$$\int_0^1 \left(p(t) - t^3\right)^2 t\, dt. \tag{2}$$

d) Betrakta linjära avbildningen $F : \mathcal{P}_2 \to \mathcal{P}_2$ definierad som **(4p)**

$$F(p)(t) = \int_0^t s p''(s) ds + p'(t) + p(1).$$

Bestäm matrisen till F i basen $\mathcal{B}_2$ och beskriv $N(F)$ (dvs nollrummet till F).

6. Vi betraktar begynnelsevärdeproblemet

$$\begin{cases} y'(t) = \begin{bmatrix} -2 & 3/2 \\ 1/2 & -1 \end{bmatrix} y, \qquad t > 0 \\ y(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}. \end{cases} \tag{3}$$

a) Beräkna den exakta lösningen $y(t)$. **(3p)**

b) Iterera ett steg med Euler framåtmetoden och steglängden $h = 1/2$. **(2p)**

VÄND!

c) Beskriv varför den ordinära differentialekvationen (3) är (asymptotisk) stabil. **(1p)**

d) Bestäm om steglängden $h = 1/2$ ger en stabil lösning med Euler framåtmetoden. **(2p)**

7. Låt V vara reellt linjärt rum med en skalärprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ och norm inducerad av skalärprodukten: $\|u\| := \sqrt{\langle u, u \rangle}$.

a) Bevisa Cauchy-Schwarz olikhet: **(5p)**

$$|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \|v\|, \quad \forall u, v \in V,$$

med likhet om endast om u och v är linjärt beroende.

b) Två normer $\| \cdot \| : V \to \mathbb{R}$ och $|||\cdot||| : V \to \mathbb{R}$, som inte nödvändigtvis är relaterade till någon skalärprodukt, sägs vara ekvivalenta om det finns konstanter $C > c > 0$ sådana att **(3p)**

$$c\|u\| \leq |||u||| \leq C\|u\|, \quad \forall u \in V.$$

Betrakta rummet $\mathbb{R}^n$ och de två normerna

$$\|x\|_1 = \sum_{j=1}^{n} |x_j| \qquad \|x\|_2 := \sqrt{\sum_{j=1}^{n} x_j^2}.$$

Visa att normerna är ekvivalenta för godtyckligt fixt $n \in \mathbb{N}$ genom att verifiera följande olikheter:

$$\|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq \sqrt{n}\|x\|_2 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Tips: Använd Cauchy-Schwarz olikhet.

8. Vi studerar egenskaper för reella linjära rum betecknad $(V, \oplus, \odot; \mathbb{R})$ där V är en icke-tom mängd, och $\oplus : V \times V \to V$ och $\odot : \mathbb{R} \times V \to V$ är rummets respektive operationer för addition och multiplikation med (reella) skalärer.

a) Låt 0_V beteckna nollelementet i $(V, \oplus, \odot; \mathbb{R})$. Visa att 0_V är ett entydigt element. **(2p)**

Tips: Man kan härleda en motsägelse.

b) Låt V vara mängden $\mathbb{R}^2$ och betrakta additionsoperationen **(4p)**

$$x \oplus_1 y = \begin{bmatrix} x_1 + y_1 - 1 \\ x_2 + y_2 - 2 \end{bmatrix}, \quad x, y \in \mathbb{R}^2,$$

och multiplikationsoperationen

$$\alpha \odot_1 x = \begin{bmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha x_2 \end{bmatrix}.$$

Visa att $(V, \oplus_1, \odot_1; \mathbb{R})$ inte ar ett linjärt rum genom att bestämma de två räknelagarna/axiomen som inte håller.

c) Betrakta mängden V, additionsoperationen $\oplus_1$ från ovan och den nya multiplikations-operationen **(2p)**

$$\alpha \odot_2 x := \begin{bmatrix} \alpha(x_1 - 1) + 1 \\ \alpha(x_2 - 2) + 2 \end{bmatrix}.$$

Bestäm nollelementet 0_V till det linjära rummet $(V, \oplus_1, \odot_2; \mathbb{R})$ (man kan visa att detta är ett linjärt rum, men det är ej uppgiften här).

SLUT