TMA671 Linjär algebra och numerisk analys

Tentan består av 8 uppgifter, med varierande antal deluppgifter.
Maximalt antal poäng är 60, och betygsgränserna är 30 för 3 (godkänd), 42 för 4 och 54 för 5.
Upp till 10 bonuspoäng från 2019 års bonusuppgifter får tillgodoräknas.
Renskriv dina lösningar, lämna ej in kladdpapper! Poängavdrag ges för dåligt motiverade, svårtolkade eller svårläsliga lösningar.
Tentan rättas och bedöms anonymt. Resultat meddelas via Ladok ca. tre veckor efter tentamenstillfället.

---

1. Betrakta följande tabell över funktionsvärden av en funktion $f(t)$.

t	-1	1	3
f	1	-1	5

Antag också att $f \in C^4([-1,3])$ och $|f^{(4)}(t)| \leq \frac{15}{16}$ för alla $t \in [-1,3]$.

(a) Bestäm interpolationspolynomet genom punkterna. (2p)

(b) Simpsons regel approximerar $\int_a^b f(t)dt$ genom att integrera interpolationspolynomet av grad 2 som interpolerar punkterna a, b och $(a+b)/2$. Härled Simpsons regel utan trunkeringsfel. Du får använda $\int_a^b (t-a)(t-b)dt = -\frac{1}{6}(b-a)^3$ och trapetsregeln utan bevis. (4p)

(c) Bestäm en approximation med felgräns av $\int_{-1}^3 f(t)dt$ med Simpsons regel eller resultatet i a) uppgiften. (2p)
Du får använda att Simpsons regel för approximation av $\int_a^b f(t)dt$ har trunkeringsfel $R_T = \frac{1}{45}2^{-6}(b-a)^5 f^{(4)}(\xi)$ där $a \leq \xi \leq b$.

2. Låt $\mathbf{e} = \{1, t, t^2, t^3\}$ vara en bas för ett vektorrum V med skalärprodukt

$$\langle p(t), q(t) \rangle = \int_{-1}^{1} p(t)q(t)dt.$$

Låt $F : V \to V$ vara avbildningen som ges av

$$F\big(p(t)\big) = \frac{d}{dt}\Big((t^2-1)\frac{dp}{dt}\Big).$$

(a) Visa att F är en linjär avbildning. (1p)

(b) Bestäm matrisen A för F i basen $\mathbf{e}$. (2p)

(c) Bestäm avbildningens egenvärden. (2p)

(d) Är F symmetrisk med avseende på skalärprodukten? (Tips: Partialintegrera.)
Kan du dra samma slutsats från matrisen A? Varför/varför inte? (3p)

3. Betrakta begynnelsevärdesproblemet (P1) som ges av följande system av differentialekvationer

$$\begin{cases} x_1'(t) = x_1(t) + 3x_2(t) \\ x_2'(t) = -2x_1(t) - 4x_2(t) \end{cases}$$

med begynnelsevillkor $x_1(0) = 1$ och $x_2(0) = 0$.

(a) Lös begynnelsevärdesproblemet (P1) med hjälp av diagonalisering. (4p)

(b) Heuns metod på ett generellt problem $y'(t) = f(t, y(t)),\ y(a) = c$ definieras av

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2}(k_1 + k_2), \quad k_1 = f(t_k, y_k), \quad k_2 = f(t_k + h, y_k + hk_1).$$

Utför en iteration med Heuns metod på (P1) med steglängd $h = 1/2$. (2p)

(c) Avgör om Heuns metod är stabil för (P1) med steglängd $h = 1/2$. (3p)
(Tips: Metoden applicerad på testproblemet $y'(t) = \lambda y(t)$ ger en tillväxtfaktor som kan användas för stabilitetsanalysen. Alternativt kan diagonalisering användas.)

4. Låt $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ och $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$.

(a) Bestäm en kompakt QR-faktorisering av A med hjälp av Gram-Schmidts ortogonaliseringsprocess. (4p)

(b) Använd QR-faktoriseringen för att hitta en minstakvadratlösning till $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. (2p)

(c) Använd resultatet i b) och lämplig sats för att hitta en icke-trivial vektor i $N(A^T)$. (2p)

5. Betrakta problemet att minimera $f(x_1, x_2) = 2x_2^4 + x_1^2 + x_1x_2 - x_2 + 2$ utan bivillkor.

(a) Gör en iteration med brantaste lutningsmetoden (Steepest Descent), med start i origo och exakt linjesökning. (3p)

(b) Visa att brantaste lutningsmetoden alltid ger en descentriktning (avtaganderiktning) i en punkt om punkten inte är en kritisk punkt. (2p)

6. Betrakta det icke-linjära ekvationssystemet $\begin{cases} 2x_2^3 - x_1x_2 = 1 \\ 3x_1 + x_2^2 = 0 \end{cases}$.

(a) Gör en iteration med Newtons metod med start i $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$. (3p)

(b) Gör en metodoberoende feluppskattning av resultatet i a) uppgiften. (3p)

7. (a) Visa att om A är en kvadratisk matris och $PA = LU$ är en LU-faktorisering med pivotering så är $\det(A) = (-1)^s \det(U)$, där s är antal radbyten som motsvarar multiplikationen med P. (3p)

(b) Använd begreppet Rayleighkvot för att bevisa att för en godtycklig $m \times n$ matris A har matrisen A^TA endast icke-negativa egenvärden. (3p)

8. En 10×3 matris A har en kompakt singulärvärdesfaktorisering (SVD) $A = U_1\Sigma_1V_1^T$ med $\Sigma_1 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 10^{-30} \end{bmatrix}$.

(a) Bestäm egenvädena för A^TA. (1p)

(b) Utgående från singulärvärdesfaktoriseringen beskriv en matris A^+ så att $\mathbf{x} = A^+\mathbf{b}$ ger minstakvadratlösningen till $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ och visa detta. Att minstakvadratlösningar uppfyller normalekvationerna anses välkänt. (4p)

(c) Varför är varken normalekvationerna eller $\mathbf{x} = A^+\mathbf{b}$ lämplig att använda för numerisk lösning av minstakvadratproblemet? Ange lämpliga mått. (3p)

(d) Beskriv ett bättre sätt att numeriskt approximera minstakvadratlösningen. (2p)