TMA671 Linjär algebra och numerisk analys

Tentan består av 8 uppgifter, med varierande antal deluppgifter.
Maximalt antal poäng är 60, och betygsgränserna är 30 för 3 (godkänd), 42 för 4 och 54 för 5.
Upp till 10 bonuspoäng från 2019 års bonusuppgifter får tillgodoräknas.
Renskriv dina lösningar, lämna ej in kladdpapper! Poängavdrag ges för dåligt motiverade, svårtolkade eller svårläsliga lösningar.
Tentan rättas och bedöms anonymt. Resultat meddelas via Ladok ca. tre veckor efter tentamenstillfället.

---

1. (a) Visa att $N(A^T) = V(A)^\perp$ för godtyckliga $m \times n$ matriser A. (3p)

(b) Låt $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$ och $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$. Bestäm minstakvadratlösningen till problemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. (3p)

(c) Använd (a) uppgiften för att verifiera att residualen i (b) uppgiften är ortogonal mot kolonnrummet $V(A)$. (1p)

2. Betrakta funktionen $f(x) = \dfrac{4}{x^2}$ för $1 \leq x \leq 4$. Låt $p(x)$ vara interpolationspolynomet som interpolerar f i punkterna $x = 1$, $x = 2$, $x = 4$.

(a) Bestäm interpolationspolynomet $p(x)$. (2p)

(b) Generellt gäller för interpolationsfelet att

$$p_n(x) - f(x) = -\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_n),$$

där ξ ligger någonstans mellan $\{x_0, x_1, \ldots, x_n, x\}$. Använd detta tillsammans med lämplig skattning av $f^{(n+1)}(\xi)$ för att uppskatta interpolationsfelet i $x = 3$ och jämför med exakt $|p_n(3) - f(3)|$. (2p)

(c) Vad innebär Runges fenomen? (1p)

(d) Uppskatta $\int_1^4 f(x)dx$ med trapetsmetoden. Utnyttja endast funktionsvärdena i $x = 1$, $x = 2$, $x = 4$. (2p)

3. Betrakta ekvationen $0 = f(x) = \ln(x) - 3x + 4$.

(a) Visa att ekvationen har exakt en rot på intervallet $(1, 2)$. (2p)

(b) Utför en iteration med Newtons metod med initialvärde $x_0 = 1$. (2p)

(c) Som alternativ till Newtons metod kan man tänka sig att skriva om problemet som $x = g_1(x) = \dfrac{4 + \ln(x)}{3}$ eller $x = g_2(x) = \exp(3x - 4)$ och använda sig av fixpunktsiteration. Vilken av funktionerna g_1 eller g_2 är lämpligast? Motivera väl. (2p)

4. Låt $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & -2 \\ -2 & -2 & 6 \end{pmatrix}$ och låt $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_A = \mathbf{x}^T A \mathbf{y}$.

(a) Bestäm samtliga egenvärden till A och baser för motsvarande egenrum.
(Tips egenvärdena är positiva heltal. Determinantberäkningen kan eventuellt förenklas genom att summera raderna.) (3p)

(b) Utför en ortogonal diagonalisering av A, dvs diagonalisera med hjälp av en ortogonalmatris. (2p)

(c) Visa att $\langle \cdot, \cdot \rangle_A$ utgör en skalärprodukt på $\mathbb{R}^3$. (2p)

(d) Bestäm en ON-bas för $\mathbb{R}^3$ med avseende på skalärprodukten $\langle \cdot, \cdot \rangle_A$.
(Tips använd gärna resultatet i (b)) (2p)

5. Betrakta problemet att minimera $f(x_1, x_2) = \frac{1}{4}x_1^4 + x_1x_2 + (1 + x_2)^2$ utan bivillkor.

(a) Newtons metod ger en sökriktning $\mathbf{d}$ i punkten $\hat{\mathbf{x}} = (0\ 1)^T$. Bestäm $\mathbf{d}$. (3p)

(b) Avgör ifall $\mathbf{d}$ är en avtaganderiktning (descentriktning). (1p)

(c) Utför en iteration linjesökning med Newtons metod i riktningen $\mathbf{d}$ med start i $\hat{\mathbf{x}}$. (2p)

(d) Visa att steglängden i (c) uppgiften är oberoende av f och startpunkten $\hat{\mathbf{x}}$ så länge f är deriverbar tillräckligt många gånger och Hessianen är inverterbar i $\hat{\mathbf{x}}$. (3p)

6. Betrakta begynnelsevärdesproblemet som ges av följande system av differentialekvationer

$$\begin{cases} x_1'(t) = & -x_1(t) & & \\ x_2'(t) = & 9x_1(t) & - & 10x_2(t) \end{cases}$$

med begynnelsevillkor $x_1(0) = 1$ och $x_2(0) = 0$.

(a) Bestäm en exakt lösning till begynnelsevärdesproblemet. (4p)

(b) Avgör ifall problemet är asymptotiskt stabilt. (1p)

(c) Utför två iterationer med Eulers framåtmetod med steglängd h. (2p)

(d) För vilka reella steglängder h är Eulers framåtmetod stabil. (2p)

7. (a) Cauchy-Schwarz olikhet säger att $|\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle| \leq \|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\|$ med likhet om och endast om $\mathbf{x}$ och $\mathbf{y}$ är linjärt beroende. Utgående från detta bevisa triangelolikheten och ange när likhet gäller. (3p)

(b) Antag att A är en inverterbar matris. Beskriv en singulärvärdesfaktorisering (SVD) av A^{-1} uttryckt i de ingående matriserna i en singulärvärdesfaktorisering av A. Beskriv de singulära värdena för A^{-1} uttryckt i de singulära värdena för A. (3p)

8. Betrakta matrisen $A = \begin{bmatrix} c & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$, där $0 < c < 1$ är en parameter.

(a) Bestäm en LU-faktorisering utan pivotering av matrisen A. (1p)

(b) Bestäm en LU-faktorisering med pivotering av matrisen A. (1p)

(c) Bestäm konditionstalet för L matriserna från (a) och (b) uppgifterna med avseende på matrisnormen $\|B\|_\infty = \max\limits_{1 \leq i \leq n} \sum\limits_{j=1}^{n} |b_{ij}|$ och förklara varför pivotering är viktigt. (3p)

(d) Förklara hur LU-faktorisering kan användas för att lösa ekvationssystem på formen $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ där A är en $n \times n$ matris och ange en fördel jämfört med Gauss-elimination. (2p)