MATEMATISKA VETENSKAPER — **Hjälpmedel: inga**

Chalmers tekniska högskola — Datum: 2019-10-12 kl. 08.30–12.30

Examinator: Thomas Bäckdahl — Telefonvakt: Filip Wikman

Lösningsförslag — ankn 5325

TMA671 Linjär algebra och numerisk analys

Tentan består av 8 uppgifter, med varierande antal deluppgifter.

Maximalt antal poäng är 60, och betygsgränserna är 30 för 3 (godkänd), 42 för 4 och 54 för 5.

Upp till 10 bonuspoäng från 2019 års bonusuppgifter får tillgodoräknas.

Renskriv dina lösningar, lämna ej in kladdpapper! Poängavdrag ges för dåligt motiverade, svårtolkade eller svårläsliga lösningar.

Tentan rättas och bedöms anonymt. Resultat meddelas via Ladok ca. tre veckor efter tentamenstillfället.

---

1. Antag att matrisen A har en LU-faktorisering $A = LU$ där L är okänd, men

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

(a) Bestäm storleken av matrisen L och ange dess diagonalelement. (1p)

(b) Bestäm en bas för nollrummet $N(A)$ till matrisen A. (2p)

(c) Bestäm en bas för ortogonala komplementet till $V(A^T)$. (2p)

Lösning:

(a) L är en 3×3 matris med ettor på diagonalen och nollor över diagonalen.

(b) U är radekvivalent med A så $A\mathbf{x} = 0 \Leftrightarrow U\mathbf{x} = 0$. Välj x_3 och x_5 som parametrar ger

$$\begin{cases} x_1 + 2x_3 - 3x_4 = 0 \\ 2x_2 - x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \frac{x_3}{2} + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \frac{x_5}{2}.$$

Alltså utgör $\{[-4\ 1\ 2\ 0\ 0]^T, [0\ -1\ 0\ 0\ 2]^T\}$ en bas för $N(A)$.

(c) Satsen om de fyra fundamentala underrummen ger att $V(A^T)^\perp = N(A)$ så basen från b) uppgiften utgör även en bas för $V(A^T)^\perp$.

2. Låt $V = C[0,1]$ vara vektorrummet av reella kontinuerliga funktioner på intervallet $[0,1]$ med skalärprodukt

$$\langle p(t), q(t) \rangle = \int_0^1 p(t)q(t)dt$$

och låt U vara det underrum av V som spänns upp av $\{1, t, t^2\}$.

(a) Visa att $\langle p(t), q(t) \rangle$ är en skalärprodukt. (3p)

(b) Bestäm en ortogonal bas för underrummet U. Du får vid behov använda att (4p)

$$\int_0^1 (6t^2 - 6t + 1)^2 dt = \frac{1}{5}.$$

(c) Bestäm ortogonalprojektionen av $p(t) = \cos(t\pi)$ på underrummet U. Du får vid behov använda att

$$\int_0^1 t\cos(\pi t)dt = -\frac{2}{\pi^2}, \qquad \int_0^1 t^2\cos(\pi t)dt = -\frac{2}{\pi^2}.$$

(2p)

(d) Bestäm matrisen för avbildningen $F(p(t)) = (t-1)p'(t) + p(1)$ i basen $\{1, t, t^2\}$. (3p)

Lösning:

(a) Den är symmetrisk: $\langle p(t), q(t)\rangle = \int_0^1 p(t)q(t)dt = \langle q(t), p(t)\rangle$, linjär i första argumentet: $\langle ap(t) + br(t), q(t)\rangle = \int_0^1 (ap(t) + br(t))q(t)dt = a\int_0^1 p(t)q(t)dt + b\int_0^1 r(t)q(t)dt = a\langle p(t), q(t)\rangle + b\langle r(t), q(t)\rangle$. Vi har även $\langle p(t), p(t)\rangle = \int_0^1 p(t)^2 dt \geq 0$. På grund av kontinuitet får vi även att likhet endast kan gälla om $p(t) = 0$ på hela intervallet. Utan kontinuiteten hade $p(t)$ kunnat vara nollskild på t.ex. enstaka punkter. Vi drar slutsatsen att det är en skalärprodukt.

(b) Gram-Schmidts ortogonaliseringsprocess på $p_1 = 1, p_2 = t, p_3 = t^2$ ger

$$
\begin{aligned}
&u_1 = p_1 = 1, \langle u_1, u_1\rangle = \langle 1, 1\rangle = 1 \Rightarrow e_1 = 1,\\
&u_2 = p_2 - \langle p_2, e_1\rangle e_1 = t - \langle t, 1\rangle = t - \tfrac{1}{2}, \langle u_2, u_2\rangle = \int_0^1 t^2 - t + \tfrac{1}{4}dt = \frac{1}{12}\\
&\Rightarrow e_2 = \sqrt{12}(t - \tfrac{1}{2}) = \sqrt{3}(2t-1),\\
&u_3 = p_3 - \langle p_3, e_1\rangle e_1 - \langle p_3, e_2\rangle e_2 = t^2 - \langle t^2, 1\rangle - \langle t^2, 2t-1\rangle 3(2t-1)\\
&= t^2 - \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{6}3(2t-1) = t^2 - t + \tfrac{1}{6}, \langle 6u_3, 6u_3\rangle = \int_0^1 (6t^2 - 6t + 1)^2 dt = \frac{1}{5}\\
&\Rightarrow e_3 = \sqrt{5}(6t^2 - 6t + 1).
\end{aligned}
$$

Svar: $\{1, \sqrt{3}(2t-1), \sqrt{5}(6t^2 - 6t + 1)\}$ utgör en ON-bas för U.

(c) Projektionen av $p(t) = \cos(t\pi)$ på U är

$$
\begin{aligned}
&\langle p(t), e_1\rangle e_1 + \langle p(t), e_2\rangle e_2 + \langle p(t), e_3\rangle e_3 = \int_0^1 \cos(t\pi)dt\\
&+ 3(2t-1)\int_0^1 (2t-1)\cos(t\pi)dt + 5(6t^2 - 6t + 1)\int_0^1 (6t^2 - 6t + 1)\cos(t\pi)dt\\
&= 3(2t-1)(2\frac{-2}{\pi^2}) + 5(6t^2 - 6t + 1)(6\frac{-2}{\pi^2} - 6\frac{-2}{\pi^2}) = -\frac{12}{\pi^2}(2t-1).
\end{aligned}
$$

Här har $\int_0^1 \cos(t\pi)dt = 0$ och integralerna från uppgiften använts.

(d) $F(1) = (t-1)0 + 1 = 1$, $F(t) = (t-1) + 1 = t$, $F(t^2) = (t-1)2t + 1 = 2t^2 - 2t + 1$. Uttryckt i basen $\{1, t, t^2\}$ blir således matrisen för avbildningen

$$
\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}
$$

3. Betrakta funktionen $f(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} x_1^3 - x_2 + 1 \\ -x_1 + 3x_2 - 3 \end{bmatrix}$.

(a) Beräkna Jacobianen av $f(\mathbf{x})$. (1p)

(b) Finn en approximativ lösning till $f(\mathbf{x}) = 0$ genom att göra en iteration med Newtons metod med start i $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. (2p)

(c) För vilka startpunkter kommer första steget i Newtons metod misslyckas? (2p)

Lösning:

(a) $J(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 3x_1^2 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$

(b) Låt $\mathbf{x}^{(0)} = \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$. Vi får $J(\mathbf{x}^{(0)}) = \begin{bmatrix}3 & -1\\-1 & 3\end{bmatrix}$, $f(\mathbf{x}^{(0)}) = \begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$. Newtons metod ger $\mathbf{x}^{(1)} = \mathbf{x}^{(0)} - J(\mathbf{x}^{(0)})^{-1}f(\mathbf{x}^{(0)}) = \mathbf{x}^{(0)} - \begin{bmatrix}1/4\\-1/4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3/4\\5/4\end{bmatrix}$.

(c) Jacobianen är singulär om $0 = \det J(\mathbf{x}) = 9x_1^2 - 1 = 9(x_1 - \frac{1}{3})(x_1 + \frac{1}{3})$. Så för alla startpunkter med $x_1 = \pm 1/3$ men godtyckligt x_2 kommer första iterationen misslyckas.

4. Låt $A = \begin{bmatrix}1 & -1\\1 & 1\\-1 & -1\end{bmatrix}$.

(a) Bestäm samtliga egenvärden till matrisen $B = A^TA$ och baser för motsvarande egenrum. (3p)

(b) Visa att en matrisen C^TC är symmetrisk oavsett hur matrisen C ser ut. (1p)

(c) Bestäm de singulära värdena för matrisen A. (1p)

(d) Bestäm konditionstalet $\kappa_2(A)$ för matrisen A. (1p)

(e) Varför används inte karakteristiska ekvationen när man gör numerisk beräkning av egenvärden till stora matriser? Ange två anledningar. (2p)

Lösning:

(a) $B = \begin{bmatrix}3 & 1\\1 & 3\end{bmatrix}$. Karakteristiska ekvationen är $0 = \det(B - \lambda I) = \begin{vmatrix}3-\lambda & 1\\1 & 3-\lambda\end{vmatrix} = \lambda^2 - 6\lambda + 8 = (\lambda - 4)(\lambda - 2)$, så egenvärdena blir $\lambda_1 = 4$ och $\lambda_2 = 2$.
Egenvektorer till $\lambda_1 = 4$:

$$\left[\begin{array}{cc|c}-1 & 1 & 0\\1 & -1 & 0\end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c}-1 & 1 & 0\\0 & 0 & 0\end{array}\right] \Rightarrow \text{ Egenvektor } \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$$

Egenvektorer till $\lambda_2 = 2$:

$$\left[\begin{array}{cc|c}1 & 1 & 0\\1 & 1 & 0\end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c}1 & 1 & 0\\0 & 0 & 0\end{array}\right] \Rightarrow \text{ Egenvektor } \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}$$

Svar: $\{\mathbf{v}_1\}$ utgör en bas för egenrummet tillhörande egenvärde $\lambda = 4$ och $\{\mathbf{v}_2\}$ är en bas för egenrummet till $\lambda = 2$.

(b) $(C^TC)^T = C^T(C^T)^T = C^TC$ så C^TC är symmetrisk.

(c) De singulära värdena till A är roten ur egenvärdena till $A^TA = B$. Alltså $\sigma_1 = 2$ och $\sigma_2 = \sqrt{2}$.

(d) Konditionstalet är $\kappa_2(A) = \sigma_1/\sigma_2 = \sqrt{2}$.

(e) Karakteristiska ekvationen bygger på determinant beräkningar, men för stora matriser kräver determinant beräkningarna extremt mycket jobb, så det vill man undvika. Om man väl har hittat det karakteristiska polynomet måste man bestämma rötterna. Den numeriska stabiliteten för detta blir sämre och sämre ju högre gradtal man har, så detta vill man också undvika.

5. Antag att $A = QR$ är en 5×3 matris, Q har ortogonala kolonner och R är en kvadratisk uppåt triangulär matris med rang 3.

(a) Visa att alla minstakvadratlösningar till $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ ges av lösningarna till $R\mathbf{x} = Q^T\mathbf{b}$. (4p)

(b) Är lösningen unik? Motivera. (2p)

Lösning:

(a) Med hjälp av Gram-Schmidt kan vi skapa en 5×2 matris så att $\widetilde{Q} = [Q\ Q_2]$ är en ortogonalmatris så att $I_5 = \widetilde{Q}\widetilde{Q}^T = [Q\ Q_2]\begin{bmatrix} Q^T \\ Q_2^T \end{bmatrix} = QQ^T + Q_2Q_2^T$. Kolonnerna i Q och Q_2 är ortogonala mot varandra så Pythagoras sats ger

$$\begin{aligned}\|A\mathbf{x} - \mathbf{b}\|^2 = \|QR\mathbf{x} - \mathbf{b}\|^2 = \|QR\mathbf{x} - QQ^T\mathbf{b} - Q_2Q_2^T\mathbf{b}\|^2 &= \|Q(R\mathbf{x} - Q^T\mathbf{b})\|^2 + \|Q_2Q_2^T\mathbf{b}\|^2 \\ &= (Q(R\mathbf{x} - Q^T\mathbf{b}))^TQ(R\mathbf{x} - Q^T\mathbf{b}) + (Q_2Q_2^T\mathbf{b})^TQ_2Q_2^T\mathbf{b} \\ &= (R\mathbf{x} - Q^T\mathbf{b})^TQ^TQ(R\mathbf{x} - Q^T\mathbf{b}) + (Q_2^T\mathbf{b})^TQ_2^TQ_2Q_2^T\mathbf{b} \\ &= (R\mathbf{x} - Q^T\mathbf{b})^T(R\mathbf{x} - Q^T\mathbf{b}) + (Q_2^T\mathbf{b})^TQ_2^T\mathbf{b} = \|R\mathbf{x} - Q^T\mathbf{b}\|^2 + \|Q_2^T\mathbf{b}\|^2.\end{aligned}$$

Detta minimeras om $R\mathbf{x} - Q^T\mathbf{b} = 0$. Vi har använt att $Q^TQ = I_3$ och $Q_2^TQ_2 = I_2$ som bara säger att kolonnerna är ortogonala. Observera att $QQ^T \neq I_5$.

(b) Ja, lösningen är unik. R är en 3×3 matris med rang 2, så $N(R)$ har dimension 0. Således finns endast en unik minstakvadratlösning.

6. Betrakta begynnelsevärdesproblemet som ges av följande system av differentialekvationer

$$\begin{cases} x_1'(t) = & 3x_1(t) & - & 2x_2(t) \\ x_2'(t) = & 2x_1(t) & - & 2x_2(t) \end{cases}.$$

(a) Bestäm en exakt lösning till begynnelsevärdesproblemet med begynnelsevillkor $x_1(0) = 1$ och $x_2(0) = 2$. (4p)

(b) Vad händer asymptotiskt om begynnelsevärdena ändras till $x_1(0) = 1$ och $x_2(0) = 2 - 3\epsilon$ för något litet tal $\epsilon \neq 0$. Vad säger detta om systemets asymptotiska stabilitet? (2p)

(c) Utför en iteration med Eulers bakåtmetod med steglängd $h = 1/4$ och begynnelsevillkor $x_1(0) = 1$ och $x_2(0) = 2$. (3p)

Lösning:

(a) Med $\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$ och $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$ blir systemet $\mathbf{x}'(t) = A\mathbf{x}(t)$.

Diagonalisera A. Karakteristiska polynomet är $\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -2 \\ 2 & -2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \lambda - 2 = (\lambda - 2)(\lambda + 1)$, så egenvärdena blir $\lambda_1 = 2$ och $\lambda_2 = -1$.
Egenvektorer till $\lambda_1 = 2$:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 0 \\ 2 & -4 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \text{Egenvektor } \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Egenvektorer till $\lambda_2 = -1$:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 4 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \text{Egenvektor } \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Detta ger $A = TDT^{-1}$ med $T = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ och $D = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$.

Låt $\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = T^{-1}\mathbf{x}(t)$. Då får vi $\mathbf{y}'(t) = D\mathbf{y}(t)$, dvs $\begin{cases} y_1'(t) = 2y_1(t) \\ y_2'(t) = -y_2(t) \end{cases}$.

De allmänna lösningarna är $\begin{cases} y_1(t) = c_1e^{2t} \\ y_2(t) = c_2e^{-t} \end{cases}$.

c_1 och c_2 bestäms av $T\mathbf{y}(0) = \mathbf{x}(0) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{array}\right] \Rightarrow c_1 = 0, c_2 = 1$.

Det ursprungliga systemets lösning blir

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = T\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ e^{-t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-t} \\ 2e^{-t} \end{bmatrix}.$$

(b) Om vi istället har $T\mathbf{y}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2-3\epsilon \end{bmatrix} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2-3\epsilon \end{array}\right] \Rightarrow c_1 = \epsilon, c_2 = 1-2\epsilon$. Detta ger

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = T\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon e^{2t} \\ (1-2\epsilon)e^{-t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1-2\epsilon)e^{-t} + 2\epsilon e^{2t} \\ 2(1-2\epsilon)e^{-t} + \epsilon e^{2t} \end{bmatrix}.$$

Vi ser att en liten störning av begynnelsedata gör att lösningen divergerar istället för att konvergera mot $[0\ 0]^T$. Alltså är systemet inte asymptotiskt stabilt.

(c) Eulers bakåtmetod ger $\mathbf{x}^{(1)} = \mathbf{x}^{(0)} + hA\mathbf{x}^{(1)} \Leftrightarrow (1-hA)\mathbf{x}^{(1)} = \mathbf{x}^{(0)}$. Med $h = 1/4$ behöver vi således lösa

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1/4 & 1/2 & 1 \\ -1/2 & 3/2 & 2 \end{array}\right] \Rightarrow \mathbf{x}^{(1)} = \begin{bmatrix} 4/5 \\ 8/5 \end{bmatrix}.$$

7. (a) Formulera och bevisa Cauchy-Schwarz olikhet för ett generellt vektorrum. Kom ihåg att ange när likhet gäller. (4p)

(b) Antag att A är en reell symmetrisk matris. Om A har ett egenvärde på formen $\lambda = a + ib$ med $a, b \in \mathbb{R}$. Kan man då säga någonting om b? Bevis krävs. (4p)

Lösning:

(a) Se sats 2.1 och dess bevis i Linjär algebra boken.

(b) Se sats 4.10 och dess bevis i Linjär algebra boken. Detta visar att b måste vara 0.

8. Betrakta följande tabell över funktionsvärden av en funktion $f(t)$.

t	1	3/2	2
f	1/3	1	2/3

Antag också att $f \in C^3([1,2])$ och $|f^{(3)}(t)| \leq 4$, $|f^{(4)}(t)| \leq 240$ för alla $t \in [1,2]$.

(a) Approximera $f'(3/2)$ så noggrant som möjligt och skatta approximationsfelet. Du får använda att centraldifferens för $f'(t)$ ger trunkeringsfel $-\frac{1}{6}h^2 f^{(3)}(\xi)$ där $t-h < \xi < t+h$. (3p)

(b) Varför kan man vid numeriska beräkningar inte välja $h > 0$ väldigt litet i centraldifferens formeln även om man kan beräkna vilka funktionsvärden som helst? (2p)

(c) Approximera integralen $\int_1^2 f(t)dt$ med felgräns med hjälp av Simpsons regel

$$\int_a^b f(t)dt \approx \frac{b-a}{6}\left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right)$$

med trunkeringsfel $R_T = \frac{1}{45}2^{-6}(b-a)^5 f^{(4)}(\xi)$ där $a \leq \xi \leq b$. (2p)

Lösning:

(a) Centraldifferens ger

$$f'(t) = \frac{f(t+h) - f(t-h)}{2h} - \frac{h^2}{6} f^{(3)}(\xi)$$

Med $t = 3/2$ och $h = 1/2$ får vi

$$f'(3/2) = \frac{f(2) - f(1)}{1} - \frac{1}{24} f^{(3)}(\xi) = \frac{1}{3} - \frac{1}{24} f^{(3)}(\xi)$$
$$\Rightarrow \left| f'(3/2) - \frac{1}{3} \right| \leq \frac{1}{24} |f^{(3)}(\xi)| \leq \frac{1}{6}$$

Svar: $f'(3/2) \approx 1/3$ med felgräns $1/6 \leq f'(3/2) \leq 1/2$.

(b) Vid beräkning av $f(t+h) - f(t-h)$ får man kancellationsfel på grund av att man subtraherar två nästan lika stora tal. Avrundningsfelet förstärks vid division med h. Om h blir för litet blir detta felet större än trunkeringsfelet.

(c)

$$\int_1^2 f(t)dt \approx \frac{2-1}{6}\left(f(1) + 4f\left(\frac{3}{2}\right) + f(2)\right) = \frac{5}{6}$$

Trunkeringsfelet $|R_T| \leq \frac{1}{45}2^{-6}|f^{(4)}(\xi)| \leq \frac{1}{12}$ så $\frac{3}{4} \leq \int_1^2 f(t)dt \leq \frac{11}{12}$.