TMA682, Teorifrågor inför tentamen

1. Antag $a \in \mathbb{R}$. Verifiera följande Laplacetransformer

$$L[\cos(at)](s) = \frac{s}{s^2 + a^2} \qquad L[\sin(at)](s) = \frac{a}{s^2 + a^2}.$$

2. Formulera och bevisa “andra shift-lagen” för Laplacetransformer:

$$\mathcal{L}[f(t-T)\theta(t-T)] = e^{-Ts}F(s).$$

3. Visa att om funktionen F är periodisk med perioden P, så är

$$\int_a^{a+P} F(x)\,dx$$

oberoende av a.

4. Låt $f(x)$ vara en 2π-periodisk funktion. Visa att om

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{inx},$$

så är

$$C_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}\,dx.$$

5. Visa att om funktionen f är 2π-periodisk och Riemann integrerbar på $[-\pi, \pi]$. C_n är de komplexa Fourierkoefficienterna till f. Då är

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |C_n|^2 \le \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(\theta)|^2 d\theta, \qquad \text{(Bessel's olikhet).}$$

6. Formulera och bevis *Riemann-Lebesgue Lemma.*

7. Antag f är 2π-periodisk kontinuerlig, f' är styckvis kontinuerlig. Visa att om a_n, b_n, C_n är $\mathcal{F}$-koeff. för f, och a_n', b_n' och C_n' $\mathcal{F}$-koeff. för f'. Då är

$$a_n' = nb_n, \qquad b_n' = -na_n, \qquad C_n' = inC_n.$$

8. Om f är 2π-periodisk och f' är syckvis kontinuerlig på $\mathbb{R}$, då

$$S_N^f(\theta) \longrightarrow \frac{1}{2}\Big[f(\theta_-) + f(\theta_+)\Big], \quad N \longrightarrow \infty. \qquad S_N^f(\theta) = \sum_{-N}^{N} C_n(f)e^{in\theta}.$$

9. Antag att $f \in \mathcal{C}^2(a,b)$. Visa att det finns interpolationskonstant C_i, oberoede av f och intervallet (a,b), så att för linjär interpolantion $\Pi_1 f$ har vi följande feluppskattningen:

$$||\Pi_1 f - f||_{L_\infty(a,b)} \le C_i(b-a)^2||f''||_{L_\infty(a,b)}$$

10. Betrakta partiella differentialekvationen

$$\begin{cases} -\Big(a(x)u'(x)\Big)' = f, & 0 < x < 1, \qquad (PDE) \\ u(0) = u(1) = 0, & \qquad\qquad (RV). \end{cases}$$

Verifiera att finitelement lösningen: $U \in V_h^0$ är den bästa approximativa lösningen av (PDE)+(RV) i energinormen: Dvs visa att $\forall v \in V_h^0$,

$$||(u-U)'||_a \le ||(u-v)'||_a \le C_i||hu''||_a, \qquad ||w||_a = \Big(\int_0^1 aw^2\,dx\Big)^{1/2},$$

med $V_h^0 :=$ {styckvis linjära kontinuerliga v med $v(0) = v(1) = 0$}.

11. Betrakta randvärdesproblemet

$$(BVP) \qquad \begin{cases} -\Big(a(x)u'(x)\Big)' = f, & 0 < x < 1, \qquad (PDE) \\ u(0) = u(1) = 0, & \qquad\qquad (RV). \end{cases}$$

Ange en variationsformulering (VF) och en minimeringsproblem (MP) för (BVP) och visa att

$$(BVP) \Longleftrightarrow (VF) \Longleftrightarrow (MP).$$

12. Betrakta partiella differentialekvationen [A posteriori feluppskattning]

$$-\Big(a(x)u'(x)\Big)' = f, \quad 0 < x < 1, \qquad u(0) = u(1) = 0.$$

Visa att det finns interpolationskonstant C_i, som beror endast av a, så att för finitelement lösningen U gäller att

$$||(u-U)'||_a \le C_i||h\mathcal{R}(U)||_{a^{-1}}, \qquad \mathcal{R}(U) = (aU')' + f \quad \text{är residulen.}$$

13. Formulera och Bevisa Poincares olikhet.

14. Betrakta följande ODE:

$$\dot{u}(t) + a(t)u(t) = f(t), \quad 0 < t \le T, \qquad u(0) = u_0.$$

Visa följande stabilitetsuppskattningar:

$$(i) \quad a(t) \ge \alpha > 0 \Longrightarrow |u(t)| \le e^{-\alpha t}|u_0| + \frac{1}{\alpha}\Big(1 - e^{-\alpha t}\Big) \max_{0 \le s \le t} |f(s)|.$$

$$(ii) \quad a(t) \ge 0 \Longrightarrow |u(t)| \le |u_0| + \int_0^t |f(s)|\, ds.$$

15. Betrakta partiella differentialekvationen

$$\begin{cases} \dot{u} - u'' = 0, & 0 < x < 1, \quad t > 0, \\ u(0,t) = u(1,t) = 0, & u(x,0) = u_0(x). \end{cases}$$

Visa följande stabilitetsolikheter:

$$(a). \qquad \frac{d}{dt}||u||^2 + 2||u'||^2 = 0.$$

$$(b). \qquad ||u(\cdot,t)|| \le e^{-t}||u_0||.$$

16. Betrakta följande, 1-dimensionell, vågekvation:

$$\begin{cases} \ddot{u} - u'' = 0, & 0 < x < 1, \quad t > 0, \\ u(0,t) = u(1,t) = 0, & \\ u(x,0) = u_0(x), & \dot{u}(x,0) = v_0(x). \end{cases}$$

Visa att den totala energin är konstant (konservering av energin). Dvs, visa att

$$\frac{1}{2}||\dot{u}||^2 + \frac{1}{2}||u'||^2 = \text{Constant}.$$