TMA683
Tillämpad matematik för K och Bt, 2016
Inlämningsuppgift

1 november 2017

1 Problemformulering.

Vi ska studera materialtransport av ett salt löst i vatten i en endimensionell kanal av längd L (m). Diffusiviteten för saltet i vattnet är D (m^2/s) och vattnet strömmar genom kanalen med en hastighet c (m/s). Salt tillförs genom kanalens väggar med en intensitet f (mol/ms). I ändarna av kanalen finns filter genom vilka fluxet av salt är proportionellt mot koncentrationen med proportionalitetskonstanter k_0 respektive k_X (m/s). Vid tiden $t = 0$ är koncentrationen av salt i kanalen u_0.

Detta beskrivs matematiskt av modellen

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) + c\frac{\partial u}{\partial x}(x,t) - D\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = f(x,t), \quad 0 < x < L, \quad 0 < t \leq T, \tag{1a}$$

$$D\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = k_0 u(0,t) + cu(0,t), \quad 0 < t \leq T, \tag{1b}$$

$$D\frac{\partial u}{\partial x}(L,t) = -k_X u(L,t) + cu(L,t), \quad 0 < t \leq T, \tag{1c}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad 0 < x < L, \tag{1d}$$

där $u(x,t)$ är koncentrationen av salt (mol/m) och T är en sluttid.

2 Uppgifter

2.1 Teoretisk del, inlämnas senast 1 december.

Uppgift: Härled variationsformulering, finita elementformulering, och tidsstegningsschema (jämför Studio II) för problem (1a)-(1d).
Tips: Randvillkoren (1b) och (1c) kommer ge upphov till ännu en matris (med bara två nollskillda element) i det diskreta ekvationssystemet.

Instruktioner för inlämning av denna del
Datorskrivna lösningar eller inscannade handskrivna lösningar laddas upp i PingPong i pdf-format senast fredag 1/12. Endast en lösning per grupp skall lämnas in. Skriv namn och personnummer på alla gruppmedlemmar. Resultat meddelas i ping-pong.
Vid behov ges möjlighet till en komplettering som ska lämnas in senast onsdag 12/12.

2.2 Praktisk del, inlämnas senast 15 december.

Uppgift:
(a) Implementera tidsstegningschemat från 2.1 i Matlab.

(b) Välj $L = 1$, $T = 2$, $D = 1$, $u_0(x) = 10x(1 - x)$, och

$$f(x,t) = \begin{cases} 100\exp(-100(x-1/4)^2), & t \leq 1, \\ 0, & t > 1. \end{cases}$$

Använd er kod för att studera konvektionens och randvillkorens kvalitativa inverkan på lösningens beteende. Intressanta värden att studera är till exempel olika kombinationer av $c = 0, 1, 10, -10$, $k_0 = 0, 1, 10^5$, och $k_X = 0, 1, 10^5$. Betrakta åtminstone fem olika fall.
Skapa animeringar av resultaten med hjälp av nedanstående kod. Resonera kring den fysikaliska rimligheten av era resultat.
Instruktioner för inlämning av denna del
Animeringar, pdf-dokument med resonemang och analys av resultaten, samt Matlabkod laddas upp i PingPong senast fredag 15/12, lämpligtvis i en zip-fil. Endast en inlämning per grupp. Skriv alla gruppdeltagares namn och personnummer i dokumentet. Resultat meddelas i ping-pong.
Vid behov ges möjlighet till en komplettering som ska lämnas in senast måndag 15 januari 2018.

Matlabkod för animering:

```
videoname = % Ange namn som en textsträng
vidobj = VideoWriter(videoname);
vidobj.FrameRate = 10;
open(vidobj)
for % Loop över tidsstegen
    % Plotta resultat vid tidssteget
     writeVideo(vidobj, getframe(gcf))
end
close(vidobj)
```