Matematik Chalmers

Tentamen i TMA683 Tillämpad matematik K2/Bt2, 2016–01–09; KL 14:00-18:00

Telefon: Mohammad Asadzadeh: 0703-088304.
Hjälpmedel: Endast utdelad (vänd textlappen) tabell. Kalkylator ej tillåten.
Varje uppgift ger max 5 poäng.
Betygsgränser, **3**: 12-17p, **4**: 18-23p och **5**: 24p- Lösningar/Granskning: Se Hemsidan, kursdagbok.

---

1. Betrakta ordinära differentialekvationen:

$$\dot{u}(t) + a(t)u(t) = f(t), \quad 0 < t \le T, \qquad u(0) = u_0.$$

Antag att $a(t) \ge 0$. Visa följande stabilitetsuppskattning:

$$|u(t)| \le |u_0| + \int_0^t |f(s)|\, ds. \tag{1}$$

2. Använd Laplacetransformer och lös ekvationen:

$$y'(t) + 3\int_0^t y(\tau)\cos(t-\tau)\, d\tau = \sin t \qquad y(0) = 1. \tag{2}$$

Ledning: Använd faltningsformel (se tabellen).

3. a) Antag att b är en positiv konstant. Beskriv den fullständiga approximationsproceduren med cG(1) metoden för följande konvektion-diffusion problem

$$\begin{cases} -\quad u''(x) + b\,u'(x) = f(x), & x \in I = (0,1), \\ \quad u(0) = 2, \quad u(1) = 3. \end{cases} \tag{3}$$

b) Bevisa en *a priori* feluppskattning i cG(1) för problem (3) i energinormen $||w||_E := ||w'||_{L_2(I)}$,

4. a) Bestäm Fourierutvecklingen av *sågtandsfunktionen*

$$f(x) = 2x, \qquad 0 \le x \le 1, \tag{4}$$

med perioden $2L = 1$.
b) Använd resultatet i a) och beräkna summan av serien

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

5. Använd variabelseparationsmetoden och bestäm $u(x,t)$ för vågekvationen

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} - u, & 0 < x < 1, \quad t > 0, \\ u(0,t) = u(1,t) = 0, & t > 0, \\ u'_t(x,0) = 0, & 0 < x < 1, \\ u(x,0) = x, & 0 < x < 1. \end{cases} \tag{5}$$

6. Betrakta följande randdvärdesproblem

$$\begin{cases} -\varepsilon u''(x) + xu'(x) + u(x) = f(x), & x \in I := (0,1) \\ u(0) = u'(1) = 0, \end{cases} \tag{6}$$

där ε är en positiv konstant och $f \in L_2(I)$. Visa att

$$||\varepsilon u''|| \le ||f||,$$

där $||\cdot||$ är $L_2(I)$-normen.

LYCKA TILL!

MA

Table of Laplace Transforms and trigonomerty

$f(t)$	$F(s)$
$af(t) + bg(t)$	$aF(s) + bG(s)$
$tf(t)$	$-F'(s)$
$t^n f(t)$	$(-1)^n F^{(n)}(s)$
$e^{-at} f(t)$	$F(s+a)$
$f(t-T)\theta(t-T)$	$e^{-Ts}F(s)$
$f'(t)$	$sF(s) - f(0)$
$f''(t)$	$s^2F(s) - sf(0) - f'(0)$
$f^{(n)}(t)$	$s^nF(s) - \sum_{k=1}^{n} s^{n-k} f^{(k-1)}(0)$
$\int_0^t f(\tau)\, d\tau$	$\frac{F(s)}{s}$
$\theta(t)$	$\frac{1}{s}$
$\frac{t^n}{n!}$	$\frac{1}{s^{n+1}}$
e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$
$\cosh at$	$\frac{s}{s^2-a^2}$
$\sinh at$	$\frac{a}{s^2-a^2}$
$\cos bt$	$\frac{s}{s^2+b^2}$
$\sin bt$	$\frac{b}{s^2+b^2}$
$t \sin bt/(2b)$	$s/(s^2+b^2)^2$
$(f \star g)(t) = \int_0^t f(t)g(t-\tau)\, d\tau$	$F(s)G(s)$
$2 \sin a \sin b \quad =$	$= \cos(a-b) - \cos(a+b)$
$2 \sin a \cos b \quad =$	$= \sin(a-b) + \sin(a+b)$
$2 \cos a \cos b \quad =$	$= \cos(a-b) + \cos(a+b)$

TMA683 Tillämpad matematik K2/Bt2, 2016–01–09; KL 14:00-18:00. Lösningar.

---

1. Se *Kompendiet/Föreläsningsanteckningar.*

2. Laplacetransformering med $y(0) = 1$ ger

$$sY(s) - y(0) + 3\frac{s}{s^2+1}Y(s) = \frac{1}{s^2+1} \Longrightarrow \Big(s + \frac{3s}{s^2+1}\Big)Y(s) = 1 + \frac{1}{s^2+1} = \frac{s^2+2}{s^2+1} \Longrightarrow$$
$$\frac{s^3+4s}{s^2+1}Y(s) = \frac{s^2+2}{s^2+1} \Longrightarrow Y(s) = \frac{s^2+2}{s^3+4s}.$$

Vi har att

$$Y(s) = \frac{s^2+2}{s^3+4s} = \frac{s^2}{s^3+4s} + \frac{2}{s^3+4s} = \frac{s}{s^2+4} + II.$$

Där identifiering av koefficienter i partialbråksuppdelning för andra termen II:

$$\frac{2}{s^3+4s} = \frac{A}{s} + \frac{Bs+C}{s^2+4}$$

ger att $A = 1/2$, $B = -1/2$ och $C = 0$. Alltså

$$\frac{2}{s^3+4s} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s} - \frac{1}{2}\cdot\frac{s}{s^2+4}.$$

Slutligen har vi

$$Y(s) = \frac{s}{s^2+4} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s} - \frac{1}{2}\cdot\frac{s}{s^2+4} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s} + \frac{1}{2}\cdot\frac{s}{s^2+4}$$

Därmed får vi att

$$y(t) = \frac{1}{2}(1 + \cos(2t)).$$

3. a) Multiplicera ekvationen med $v \in H_0^1(I) = \{v : ||v|| + ||v'|| < \infty,\ v(0) = v(1) = 0\}$ och integrera över I. Här $|| \bullet || = \Big(\int_I | \bullet |^2\, dx\Big)^{1/2}$ är L_2-normen.

Genom partial integration och med hänsyn till randdata får vi följande *variationsproblem*:
Finn $u \in H^1(I) := \{w : ||w|| + ||w'|| < \infty,\ w(0) = 2\,\&\, w(1) = 3\}$ så att

$$\int_I (u'v' + bu'v) = \int_I fv, \quad \forall v \in H_0^1(I). \tag{7}$$

Observera att $H^1(I)$ presenterar lösningsrummet medan $H_0^1(I)$ är testrum.
En motsvarade *Finitelement Metod* med *cG*(1) formuleras som: Finn $U \in V_h \subset H^1(I)$ så att

$$\int_I (U'v' + bU'v) = \int_I fv, \quad \forall v \in V_h^0 \subset H_0^1(I), \tag{8}$$

där

$$V_h = \{w_h : w_h \text{ är styckvis linjär och kontinuerlig i en partition av } I,\ w_h(0) = 2,\ w_h(1) = 3\}.$$

och

$$V_h^0 = \{v : v \text{ är styckvis linjär och kontinuerlig i en partition av } I,\ v(0) = v(1) = 0\}.$$

Låt nu $e = u - U$, då ger (7)-(8) att

$$\int_I (e'v' + be'v) = 0, \quad \forall v \in V_h^0, \qquad \text{(Galerkin Ortogonalitet)}. \tag{9}$$

Observera att p.g.a. $e(0) = e(1) = 0$, får vi

$$\int_I e'e = \frac{1}{2}\int_I \frac{d}{dx}(e^2) = \frac{1}{2}(e^2)|_0^1 \equiv 0. \tag{10}$$

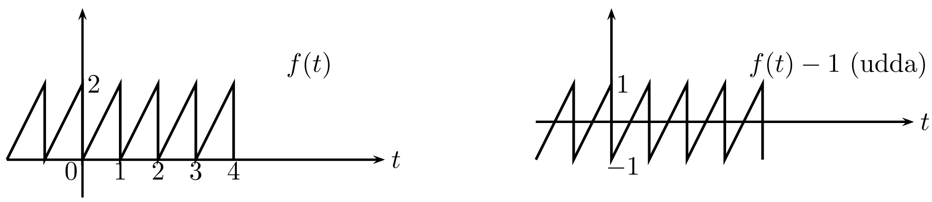
b) *A priori feluppskattning:* Genom att använda (9) och (10) får vi

$$\begin{aligned}
\|e\|_E^2 &= \|e'\|_{L_2(I)}^2 = \int_I e'e'\,dx = \int_I (e'e' + be'e) = \int_I \Big(e'(u-U)' + be'(u-U)\Big) \\
&= \{\pm\pi_h u \text{ med } \pi_h \in V_h\} = \int_I \Big(e'(u - \pi_h u + \pi_h u - U)' + be'(u - \pi_h u + \pi_h u - U)\Big)\,dx \\
&= \int_I \Big(e'(u-\pi_h u)' + be'(u-\pi_h u)\Big)\,dx + \int_I \Big(e'(\pi_h u - U)' + be'(\pi_h u - U)\Big)\,dx \\
&= \{\text{Eftersom } (\pi_h u - U) \in V_h^0,\ (9) \Longrightarrow\} = \int_I \Big(e'(u-\pi_h u)' + be'(u-\pi_h u)\Big)\,dx \le \{C-S\} \\
&\le \|(u-\pi_h u)'\|\|e'\| + b\|u-\pi_h u\|\|e'\| \le C_i\{\|hu''\| + b\|h^2u''\|\}\|e'\|.
\end{aligned}$$

Detta ger, med $h=$ konstant, att

$$\|e\|_E \le C_i(h + bh^2)\|u''\|.$$

4. Observera att $f(t) - 1$ är en udda funktion (se figuren nedan)



a) $f(t) - 1 = 2t - 1$ är udda med perioden $2L = 1 (L = 1/2)$. Vi har att $a_n = 0$ och

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{2}{L}\int_0^L [f(t)-1]\sin\Big(\frac{n\pi}{L}t\Big)\,dt \;= 4\int_0^{1/2}(2t-1)\sin(2\pi nt)\,dt \\
&= 4\Big[(2t-1)\frac{-1}{2\pi n}\cos(2\pi nt)\Big]_0^{1/2} - 4\int_0^{1/2} 2\cdot\frac{-1}{2\pi n}\cos(2\pi nt) = \frac{-2}{n\pi}.
\end{aligned}$$

Alltså

$$f(t) - 1 = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(2\pi nt) \Longrightarrow f(t) = 1 - \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin(2\pi nt).$$

b) Eftersom $a_n = 0$, Parsevals formel $\Longrightarrow$

$$\frac{1}{L}\int_L^L [f(t)-1]^2\,dt = \sum_{n=1}^{\infty} b_n^2 \quad \Longrightarrow \frac{1}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n^2} = 2\int_0^1 (2t-1)^2\,dt = \frac{2}{3}$$

Alltså

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

5. Variabelseparation ger med ansatsen $u(x,t) = X(x)T(t) \neq 0$ $X''T = XT' - XT$ eller $\frac{T''}{T} = \frac{X''}{X} - 1 = \lambda - 1$. Med homogem raddata är för $X(x)$, $\lambda < 0$. Sätt $\lambda = -\mu^2$. Detta ger

$$\begin{cases} X'' = \lambda X, \\ X(0) = X(1) = 0. \end{cases} \qquad T'' = (\lambda - 1)T.$$

(Obs! $\lambda \ge 0$ är ej egenvärde ty, då för man p.g.a. $X(0) = X(\pi) = 0$, den triviala lösningen). Alltså

$$\lambda = -\mu^2 < 0 \Longrightarrow X(x) = A\cos\mu x + B\sin\mu x.$$

$X(0) = 0 \Longrightarrow A = 0$ och $X(1) = 0 \Longrightarrow B \sin \mu = 0 \quad \{B \neq 0\} \quad \Longrightarrow \mu = n\pi$. Därmed

$$\lambda_n = -(n\pi)^2, \qquad X_n(x) = \sin n\pi x, \qquad n = 1, 2, \ldots.$$

För T gäller då

$$T'' = (\lambda - 1)T \Longrightarrow T_n(t) = A_n \cos\Big(\sqrt{n^2\pi^2 + 1} \cdot t\Big) + B_n\Big(\sqrt{n^2\pi^2 + 1} \cdot t\Big), \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Superposition ger den allmänna lösningen till DE som uppfyller RV i x-led

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin(n\pi x)\{A_n \cos \sqrt{n^2\pi^2 + 1} \cdot t + B_n \sin \sqrt{n^2\pi^2 + 1} \cdot t\}.$$

Villkoret $u_t'(x, 0) = 0$ ger att

$$\sum_{n=1}^{\infty} B_n \sqrt{n^2\pi^2 + 1} \sin(n\pi x) = 0.$$

Alltså är $B_n \equiv 0$. Vidare $u(x.0) = x$ ger

$$A_n = 2\int_0^1 x \sin(n\pi x)\,dx = 2\Big[x\frac{-1}{n\pi}\cos(n\pi x)\Big]_0^1 - 2\int_0^1 \frac{-1}{n\pi}\cos(n\pi x)\,dx = \frac{-2}{n\pi}\cos(n\pi) = \frac{-2(-1)^n}{n\pi}$$

Vi har att

$$u(x,t) = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin(n\pi x) \cos\Big(\sqrt{n^2\pi^2 + 1} \cdot t\Big).$$

6. Multiplicera ekvationrn med $-\varepsilon u'\prime$ och integrera över vI:

$$||\varepsilon u''||^2_{L_2(I)} - \varepsilon\int_0^1 xu'u''\,dx - \varepsilon\int_0^1 uu''\,dx = \int_0^1 (-\varepsilon u'')f\,dx. \tag{11}$$

Men med partial integration

$$\int_0^1 xu'u''\,dx = [PI] = [xu'^2]_0^1 - \int_0^1 (u' + xu'')u'\,dx = \{u'(1) = 0\} = -\int_0^1 u'^2\,dx - \int_0^1 xu\prime u''\,dx.$$

Alltså

$$\int_0^1 xu\prime u''\,dx = -\frac{1}{2}\int_0^1 u'^2\,dx.$$

Vidare

$$\int_0^1 uu''\,dx = [uu']_0^1 - \int_0^1 u'^2\,dx = -\int_0^1 u'^2\,dx.$$

Insättning i (11) ger att

$$||\varepsilon u''||^2_{L_2(I)} + \frac{\varepsilon}{2}\int_0^1 u'^2\,dx + \varepsilon\int_0^1 u'^2\,dx = \int_0^1 (-\varepsilon u'')f\,dx. \tag{12}$$

Detta ger

$$||\varepsilon u''||^2_{L_2(I)} \leq \int_0^1 (-\varepsilon u'')f\,dx \leq \{C - S\} \leq ||\varepsilon u''||_{L_2(I)}||f||_{L_2(I)}. \tag{13}$$

Alltså

$$||\varepsilon u''||_{L_2(I)} \leq ||f||_{L_2(I)}.$$

MA