Matematik Chalmers

Tentamen i TMA683/TMA682 Tillämpad matematik K2/Bt2,
2017–08–17, kl 14:00-18:00

Telefon: Olof Giselsson, 031-772 5325
Hjälpmedel: Endast tabell på baksidan av tesen. Kalkylator ej tillåten.
Betygsgränser, **3**: 12-17p, **4**: 18-23p och **5**: 24-30p
Lösningar/Granskning: Se kurshemsidan.

---

1. Använd Laplacetransformen för att lösa differentialekvationen (5p)

$$\begin{cases} y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = 1, & t > 0 \\ y(0) = 1,\ y'(0) = -1 \end{cases}$$

2. Bestäm den styckvis linjära interpolanten till (4p)

$$f(x) = \frac{1}{\pi^2}(x-\pi)^2 - \cos^2(x - \frac{\pi}{2})$$

då intervallet $[-\pi, \pi]$ delas i 4 lika stora delintervall.

3. a) Bestäm Fourierserien till den 2-periodiska funktionen (4p)

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -1 < x < 0 \\ 1, & 0 < x < 1 \end{cases}$$

b) Använd resultatet i a) för att beräkna summan (2p)

$$S = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k-1}$$

4. Härled variationsformulering och finita element-formulering, samt beräkna den styckvis linjära finita element-lösningen till randvärdesproblemet (5p)

$$\begin{cases} -\frac{1}{4}u''(x) + u'(x) - 3u = -1, & x \in (0,1), \\ u(0) = u'(1) = 0, \end{cases}$$

på en likformig partition $\mathcal{T}_h$ av intervallet $[0,1]$ med steglängd $h = 1/2$.

5. Lös värmeledningsekvationen (5p)

$$\begin{cases} u_{xx} = u_t - 1, & x \in (0,1), \quad t > 0, \\ u(0,t) = u(1,t) = 0, & t > 0, \\ u(x,0) = 0, & x \in (0,1) \end{cases}$$

med hjälp av variabelseparationsmetoden.

6. Visa att om $\mathcal{L}[f(t)](s) = F(s)$ så gäller följande Laplacetransformer: (5p)

a) $\mathcal{L}[f'(t)](s) = sF(s) - f(0)$,
b) $\mathcal{L}[f''(t)](s) = s^2F(s) - sf(0) - f'(0)$.

LYCKA TILL! /TG

Tabell med Laplacetransformer och trigonometriska formler

$f(t)$	$F(s)$
$af(t) + bg(t)$	$aF(s) + bG(s)$
$tf(t)$	$-F'(s)$
$t^n f(t)$	$(-1)^n F^{(n)}(s)$
$e^{-at} f(t)$	$F(s+a)$
$f(t-T)\theta(t-T)$	$e^{-Ts}F(s)$
$f'(t)$	$sF(s) - f(0)$
$f''(t)$	$s^2F(s) - sf(0) - f'(0)$
$f^{(n)}(t)$	$s^nF(s) - \sum_{k=1}^{n} s^{n-k} f^{(k-1)}(0)$
$\int_0^t f(\tau)\, d\tau$	$\frac{F(s)}{s}$
$\theta(t)$	$\frac{1}{s}$
$\frac{t^n}{n!}$	$\frac{1}{s^{n+1}}$
e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$
$\cosh at$	$\frac{s}{s^2 - a^2}$
$\sinh at$	$\frac{a}{s^2 - a^2}$
$\cos bt$	$\frac{s}{s^2 + b^2}$
$\sin bt$	$\frac{b}{s^2 + b^2}$
$\frac{t}{2b} \sin bt$	$\frac{s}{(s^2 + b^2)^2}$
$\frac{1}{2b^3}(\sin bt - bt \cos bt)$	$\frac{1}{(s^2 + b^2)^2}$

$2 \sin a \sin b = \cos(a-b) - \cos(a+b)$
$2 \sin a \cos b = \sin(a-b) + \sin(a+b)$
$2 \cos a \cos b = \cos(a-b) + \cos(a+b)$

TMA683/TMA682 Tillämpad matematik K2/Bt2, 2017–08–17, kl 14:00-18:00. Lösningar.

---

1. Laplacetransformering med $y(0) = 1$ och $y'(0) = -1$ ger, eftersom $\mathcal{L}[1] = \mathcal{L}[\theta(t)] = \frac{1}{s}$,

$$s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) + 3sY(s) - 3y(0) + 2Y(s) = \frac{1}{s} \Longrightarrow$$

$$(s^2 + 3s + 2)Y(s) = \frac{1}{s} + s + 2 \Longrightarrow Y(s) = \frac{1}{s(s^2 + 3s + 2)} + \frac{s + 2}{s^2 + 3s + 2} = \frac{1}{s(s + 1)(s + 2)} + \frac{1}{s + 1}$$

Partialbråksuppdelning ger

$$\frac{1}{s(s + 1)(s + 2)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s + 1} + \frac{C}{s + 2}$$

där vi kan använda handpåläggning eller multiplicera ihop och få ekvationssystemet

$$\begin{cases} A + B + C = & 0 \\ 3A + 2B + C = & 0 \\ 2A = & 1 \end{cases}$$

med lösningen $A = 1/2$, $B = -1$, $C = 1/2$. Alltså

$$Y(s) = \frac{1}{2}\frac{1}{s} - \frac{1}{s + 1} + \frac{1}{2}\frac{1}{s + 2} + \frac{1}{s + 1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s} + \frac{1}{s + 2}\right)$$

$$\Longrightarrow y(t) = \frac{1}{2}\left(1 + e^{-2t}\right), \ t \geq 0$$

där vi använt att $\mathcal{L}[e^{at}] = \frac{1}{s-a}$.

2. Då intervallet $[-\pi, \pi]$ delas in i 4 delintervall fås nodpunkterna $\{-\pi, -\pi/2, 0, \pi/2, \pi\}$. Funktionens värde i dessa punkter ges av

x	$-\pi$	$-\pi/2$	0	$\pi/2$	π
$f(x)$	4	$5/4$	1	$-3/4$	0

På varje delintervall $[a, b]$ ges den styckvis linjära interpolanten $\pi_1 f$ av

$$\pi_1 f(x) = f(a)\phi_a(x) + f(b)\phi_b(x) = f(a)\frac{b - x}{b - a} + f(b)\frac{x - a}{b - a}.$$

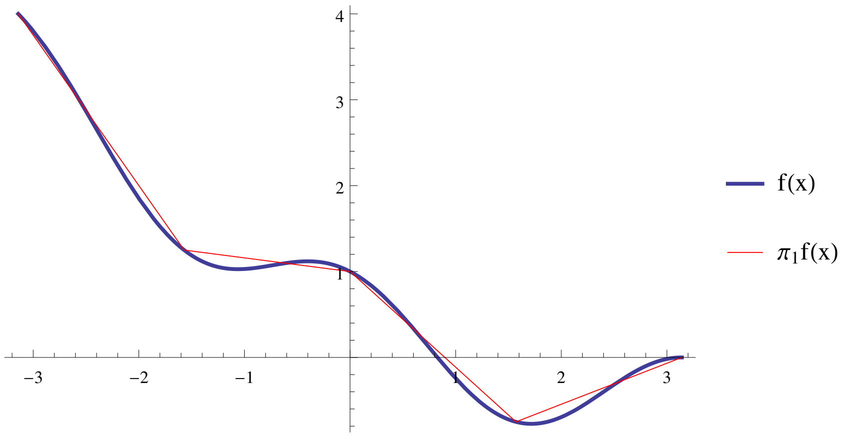
Genom att sätta in ovanstående värden för varje delintervall fås

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{\pi}\left(-\frac{3}{4}\pi - \frac{11}{4}x\right), & x \in [-\pi, -\pi/2) \\ \frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{4}x\right), & x \in [-\pi/2, 0) \\ \frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{7}{4}x\right), & x \in [0, \pi/2) \\ \frac{2}{\pi}\left(-\frac{3}{4}\pi + \frac{3}{4}x\right), & x \in [\pi/2, \pi] \end{cases}$$

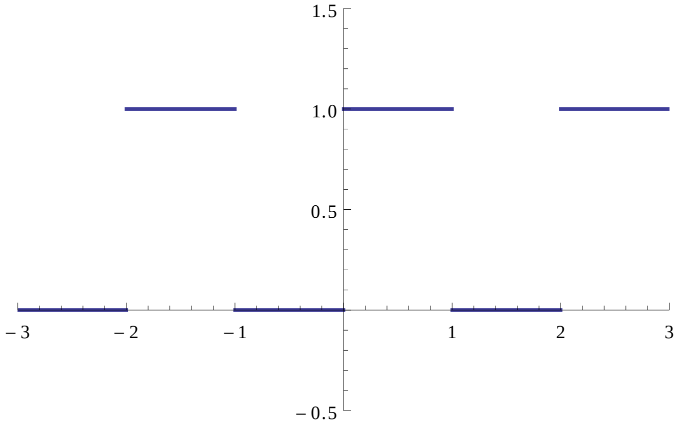
I figuren nedan visas hur de båda funktionerna ser ut.

3. a) Funktionen $f(x)$ är varken jämn eller udda. Man kan direkt räkna ut cos- och sin-koefficienter genom att stoppa in i formlerna, men man kan också notera att $g(x) = f(x) - \frac{1}{2}$ är en udda funktion (med värdet $\frac{1}{2}$ på intervallet $(0, 1)$). Om vi gör detta får vi att

$$f(x) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \qquad \text{med} \qquad b_n = \frac{2}{L}\int_0^L g(x) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx, \ n = 0, 1, \ldots$$



FIGUR 1. Funktionen $f(x)$ och den styckvis linjära interpolanten $\pi_1 f(x)$ i uppgift 2.



FIGUR 2. Den 2-periodiska funktionen $f(x)$ i uppgift 3.

där $2L = 2$, dvs $L = 1$. Alltså är för $n = 1, 2, \ldots$,

$$b_n = 2\int_0^1 \frac{1}{2}\sin(n\pi x)\,dx = \left[-\frac{1}{n\pi}\cos(n\pi x)\right]_0^1$$
$$= \frac{1-(-1)^n}{n\pi} = \begin{cases} 0, & n \text{ jämnt} \\ \frac{2}{n\pi}, & n \text{ udda} \end{cases}$$

Därför är

$$f(x) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-(-1)^n}{n\pi}\sin(n\pi x) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{(2k-1)\pi}\sin((2k-1)\pi x).$$

b) Om vi sätter $x = 1/2$ i Fourierserien ovan, får vi

$$1 = f(1/2) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{(2k-1)\pi}\sin((2k-1)\pi/2) = \frac{1}{2} - \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k-1} = \frac{1}{2} - \frac{2}{\pi}S,$$

där S är den sökta summan (eftersom $\sin((2k-1)\pi/2) = -(-1)^k$ — kolla i enhetscirkeln för $k = 1, 2, 3, \ldots$). Vi löser ut S och får $S = -\frac{\pi}{4}$.

4. Multiplicera ekvationen med en testfunktion $v \in V$, där

$$V = \{v : ||v||_{L_2(0,1)} + ||v'||_{L_2(0,1)} < \infty,\ v(0) = 0\}$$

och integrera över $[0,1]$. Notera att Neumann-randvillkoret $u'(1)=0$ inte ger något villkor på testfunktionerna v. Genom partialintegration och med hänsyn till randdata får vi följande *variationsproblem*: Finn $u \in V$ så att

(1)
$$\int_0^1 (\frac{1}{4}u'v' + u'v - 3uv)dx = -\int_0^1 v dx, \quad \forall v \in V.$$

En motsvarade *Finita Element Metod* med $cG(1)$-metoden (styckvis linjära lösningar) formuleras som: Hitta $U \in V_h$ så att

(2)
$$\int_0^1 (\frac{1}{4}U'v' + U'v - 3Uv)dx = -\int_0^1 v dx, \quad \forall v \in V_h$$

där

$$V_h = \big\{ v : v \text{ är styckvis linjär och kontinuerlig i en partition av } [0,1] \text{ med steglängd } h, \ v(0) = 0 \big\}.$$

Vi ansätter $U(x) = \xi_1\varphi_1(x) + \xi_2\varphi_2(x)$ där

$$\varphi_j(x) = \begin{cases} \frac{1}{h}(x - x_{j-1}), & x \in [x_{j-1}, x_j) \\ \frac{1}{h}(x_j - x), & x \in [x_j, x_{j+1}) \\ 0, & \text{annars} \end{cases}, \qquad j = 1,2$$

är hattfunktionerna svarande mot nodpunkterna $x_j = j/2$, $j = 1,2$. Notera att φ_2 är en "halv hatt".
Vi sätter in $U(x) = \xi_1\varphi_1(x) + \xi_2\varphi_2(x)$ i (2) och väljer testfunktioner $\varphi = \varphi_i$, $i = 1,2$. Vi får då ekvationssystemet

$$\left(\frac{1}{4}A + C - 3M\right)\xi = b,$$

där A är styvhetsmatrisen med element $A_{ij} = \int_0^1 \varphi_i'\varphi_j' dx$, $i,j = 1,2$, C är konvektionsmatrisen med element $C_{ij} = \int_0^1 \varphi_i\varphi_j' dx$, $i,j = 1,2$, och M är massmatrisen med element $M_{ij} = \int_0^1 \varphi_i\varphi_j dx$, $i,j = 1,2$. b är högerledsvektorn med element $b_i = -\int_0^1 \varphi_i dx$, $i = 1,2$ och $\xi = (\xi_1, \xi_2)^T$ är lösningsvektorn.
Beräkning av matriselementen ger (eftersom ϕ_2 är en halv hattfunktion) att

$$A = \begin{bmatrix} \frac{2}{h} & -\frac{1}{h} \\ -\frac{1}{h} & \frac{1}{h} \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \qquad M = \begin{bmatrix} \frac{2}{3}h & \frac{h}{6} \\ \frac{h}{6} & \frac{h}{3} \end{bmatrix}$$

För högerledsvektorn får vi $b_1 = -h$, och $b_2 = -h/2$. Med $h = 1/2$ får vi alltså ekvationssystemet

$$\left(\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix} = -\frac{1}{4}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix},$$

eller

$$\begin{bmatrix} 0 & -1/4 \\ -5/4 & 1/2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/2 \\ -1/4 \end{bmatrix}$$

(Lösningen är $\xi = (1,2)^T$.)

5. Vi ser att ekvationen är inhomogen. Ansätt därför $u(x,t) = v(x,t) + S(x)$ och sätt in i ekvationen och randvillkoren:

$$\begin{cases} v_t = v_{xx} + S''(x) + 1, & x \in (0,1), \quad t > 0, \\ v(0,t) + S(0) = 0, \quad v(1,t) + S(1) = 0, & t \geq 0, \\ v(x,0) + S(x) = 0, & x \in (0,1). \end{cases}$$

Vi ser att om $S(x)$ uppfyller

$$\begin{cases} S''(x) = -1, & x \in (0,1), \quad t > 0, \\ S(0) = 0, \quad S(1) = 0 \end{cases}$$

så löser $v(x,t)$ det homogena värmeledningsproblemet

$$\begin{cases} v_t = v_{xx}, & x \in (0,1), \quad t > 0, \\ v(0,t) = 0, \quad v(1,t) = 0, & t \geq 0, \\ v(x,0) = -S(x), & x \in (0,1). \end{cases}$$

Integration två gånger och insättning av randvillkoren för $S(x)$ ger att $S(x) = -\frac{1}{2}x(x-1)$. Vi har alltså att $v(x,0) = \frac{1}{2}x(x-1)$.

För att bestämma $v(x,t)$, sätt $v(x,t) = X(x)T(t)$. Insättning i differentialekvationen för v ger $X''T = XT'$ eller $\frac{X''}{X} = \frac{T'}{T} = \lambda$. Vi har sett att med homogena randvillkor är $\lambda < 0$. Sätt $\lambda = -\mu^2$. Detta ger

$$\begin{cases} X'' + \mu^2 X = 0, \\ X(0) = X(1) = 0. \end{cases} \qquad T' = -\mu^2 T.$$

Lösningen för $X(x)$ är då

$$X(x) = A\cos\mu x + B\sin\mu x.$$

$X(0) = 0 \Longrightarrow A = 0$ och $X(1) = 0 \Longrightarrow B\sin\mu = 0 \quad \Longrightarrow \mu = n\pi$ (ty $B = 0$ ger trivial lösning). Vi har alltså

$$\mu_n = -n\pi, \qquad X_n(x) = B_n \sin n\pi x, \qquad n = 1, 2, \ldots.$$

För T gäller då

$$T_n' = -\mu_n^2 T_n \Longrightarrow T_n(t) = Ce^{-(n\pi)^2 t}, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Superposition ger den allmänna lösningen

$$v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n e^{-(n\pi)^2 t} \sin n\pi x.$$

Från begynnelsevillkoret fås att

$$v(x,0) = \frac{1}{2}x(x-1) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin n\pi x,$$

och vi ser att B_n är Fourier-sinus koefficienter för funktionen $\frac{1}{2}x(x-1)$ på intervallet $(0,1)$:

$$\begin{aligned}
B_n &= 2\int_0^1 \frac{1}{2}x(x-1)\sin n\pi x\,dx = \left[x(x-1)\frac{1}{n\pi}\cos n\pi x\right]_{x=0}^1 + \frac{1}{n\pi}\int_0^1 (2x-1)\cos n\pi x\,dx \\
&= \frac{1}{(n\pi)^2}\left[(2x-1)\sin n\pi x\right]_{x=0}^1 - \frac{2}{(n\pi)^2}\int_0^1 \sin n\pi x\,dx \\
&= \frac{2}{(n\pi)^3}\left[\cos n\pi x\right]_{x=0}^1 = \frac{2}{(n\pi)^3}\left((-1)^n - 1\right)
\end{aligned}$$

Alltså är lösningen

$$v(x,t) = \frac{2}{\pi^3}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n - 1}{n^3} e^{-n^2\pi^2 t} \sin n\pi x$$

och

$$u(x,t) = S(x) + v(x,t) = \frac{1}{2}x(1-x) + \frac{2}{\pi^3}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n - 1}{n^3} e^{-n^2\pi^2 t} \sin n\pi x$$

6. Se Fourier-häftet, sats 1:7.

/TG