

**Tentamen i TMA683/TMA682 Tillämpad matematik K2/Bt2,  
2018–01–13, kl 14:00-18:00**

Telefon: Maximilian Thaller, 031-772 5325; Examinator: Tobias Gebäck, 031-772 3547

Hjälpmedel: Endast tabell på baksidan av tesen. Kalkylator ej tillåten.

Betygsgränser, **3**: 20–29p, **4**: 30–39p och **5**: 40–50p

Lösningar/Granskning: Se kurshemsidan.

---

1. Använd Laplacetransformer för att lösa differentialekvationen (8p)

$$\begin{cases} y'(t) + 4y(t) = te^{-2t}, & t > 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

2. a) Bestäm Fourierserien till funktionen (5p)

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \in [0, \frac{1}{3}) \\ 0, & x \in [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}) \end{cases}$$

med perioden  $\frac{2}{3}$ .

- b) Använd resultatet i a) till att beräkna summan  $S = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2}$ . (3p)

3. Betrakta den inhomogena vågekvationen (10p)

$$\begin{cases} \ddot{u}(x, t) - 4u''(x, t) = 1, & x \in (0, 1), \quad t > 0, \\ u(0, t) = 1, \quad u(1, t) = 0, & t \geq 0, \\ u(x, 0) = 1 - x^2, & x \in (0, 1). \\ \dot{u}(x, 0) = 0, & x \in (0, 1). \end{cases}$$

Använd variabelseparationsmetoden för att bestämma  $u(x, t)$ .

4. Härled ett tidsstegnings-schema med Crank-Nicolson-metoden för (5p)  
begynnelsevärdesproblemet

$$\begin{cases} u'(t) + u(t) = t, & t > 0, \\ u(0) = 0, \end{cases}$$

samt beräkna den approximativa lösningens värden vid  $t = 1$  och  $t = 2$ , då tidssteget  $\Delta t = 1$ .

5. a) Bestäm värdet på konstanten  $a$  så att funktionen (3p)

$f(x) = x^5 - ax^3$  blir ortogonal mot alla konstanta funktioner på intervallet  $[0, 2]$ .

- b) Bestäm  $L_2$ -projektionen av  $f(x)$  (med värdet på  $a$  från a)-uppgiften) (2p)

på  $\mathcal{P}^{(0)}(0, 2)$ , dvs på rummet av alla konstanta funktioner på intervallet  $[0, 2]$ .

6. Härled *variationsformulering* och *finita element-formulering* med  $cG(1)$ -metoden (6p)  
för randvärdesproblemet

$$\begin{cases} u''(x) + 3u'(x) = e^x, & x \in [0, 1], \\ u(0) = 0, \\ u(1) = 5, \end{cases}$$

(**OBS!** Det linjära ekvationssystemet skall *ej* härledas och inga matriselement beräknas.)

7. Antag att  $f(t) = 0$ ,  $g(t) = 0$  för  $t < 0$ , och att  $f$  och  $g$  är av exponentiell ordning. (8p)  
Visa att  $\mathcal{L}[f * g] = \mathcal{L}[f]\mathcal{L}[g]$ , där  $f * g$  är faltningen av  $f$  och  $g$ .

LYCKA TILL!

/TG

---

Tabell med Laplacetransformer och trigonometriska formler

$f(t)$	$F(s)$
$af(t) + bg(t)$	$aF(s) + bG(s)$
$tf(t)$	$-F'(s)$
$t^n f(t)$	$(-1)^n F^{(n)}(s)$
$e^{-at} f(t)$	$F(s + a)$
$f(t - T)\theta(t - T)$	$e^{-Ts} F(s)$
$f'(t)$	$sF(s) - f(0)$
$f''(t)$	$s^2 F(s) - sf(0) - f'(0)$
$f^{(n)}(t)$	$s^n F(s) - \sum_{k=1}^n s^{n-k} f^{(k-1)}(0)$
$\int_0^t f(\tau) d\tau$	$\frac{F(s)}{s}$
$\theta(t)$	$\frac{1}{s}$
$\frac{t^n}{n!}$	$\frac{1}{s^{n+1}}$
$e^{-at}$	$\frac{1}{s + a}$
$\cosh at$	$\frac{s}{s^2 - a^2}$
$\sinh at$	$\frac{a}{s^2 - a^2}$
$\cos bt$	$\frac{s}{s^2 + b^2}$
$\sin bt$	$\frac{b}{s^2 + b^2}$
$\frac{t}{2b} \sin bt$	$\frac{s}{(s^2 + b^2)^2}$
$\frac{1}{2b^3} (\sin bt - bt \cos bt)$	$\frac{1}{(s^2 + b^2)^2}$

$$2 \sin a \sin b = \cos(a - b) - \cos(a + b)$$

$$2 \sin a \cos b = \sin(a - b) + \sin(a + b)$$

$$2 \cos a \cos b = \cos(a - b) + \cos(a + b)$$

## Lösningar.

1. Laplacetransformering med  $y(0) = 1$  ger, eftersom  $\mathcal{L}[te^{-2t}] = \frac{1}{(s+2)^2}$  enligt första förskjutningsregeln,

$$sY(s) - y(0) + 4Y(s) = \frac{1}{(s+2)^2} \implies$$

$$(s+4)Y(s) = 1 + \frac{1}{(s+2)^2} \implies Y(s) = \frac{1}{s+4} + \frac{1}{(s+4)(s+2)^2}$$

Partialbråksuppdelning i andra termen ger

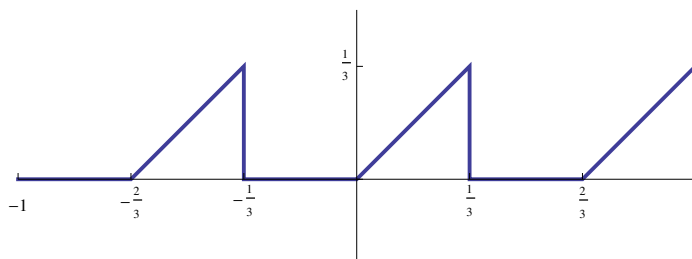
$$\frac{1}{(s+4)(s+2)^2} = \frac{A}{s+4} + \frac{B}{s+2} + \frac{C}{(s+2)^2}$$

där vi kan bestämma  $A = 1/4$ ,  $B = -1/4$ ,  $C = 1/2$ . Alltså

$$Y(s) = \left(1 + \frac{1}{4}\right) \frac{1}{s+4} - \frac{1}{4} \frac{1}{s+2} + \frac{1}{2} \frac{1}{(s+2)^2} \implies$$

$$y(t) = \frac{5}{4}e^{-4t} - \frac{1}{4}e^{-2t} + \frac{1}{2}te^{-2t} = \frac{1}{4}(5e^{-4t} - (1-2t)e^{-2t}), \quad t \geq 0$$

där vi använt att  $\mathcal{L}[e^{-4t}] = \frac{1}{s+4}$ ,  $\mathcal{L}[e^{-2t}] = \frac{1}{s+2}$ ,  $\mathcal{L}[te^{-2t}] = \frac{1}{(s+2)^2}$  (enligt första förskjutningsregeln).



FIGUR 1. Funktionen  $f(x)$  med perioden  $2/3$ .

2. a) Från figur 1 ser vi att funktionen  $f(x)$  varken är jämn eller udda. Alltså är

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \right)$$

med

$$a_n = \frac{1}{L} \int_0^{2L} f(x) \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx, \quad n = 0, 1, \dots$$

$$b_n = \frac{1}{L} \int_0^{2L} f(x) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx, \quad n = 1, 2, \dots$$

där perioden är  $2L = 2/3$ , dvs  $L = 1/3$ . Vi har att

$$a_0 = 3 \int_0^{2/3} f(x) dx = 3 \int_0^{1/3} x dx = \frac{1}{6}$$

och, för  $n = 1, 2, \dots$ ,

$$a_n = 3 \int_0^{1/3} x \cos(3n\pi x) dx = \frac{1}{n\pi} [x \sin(3n\pi x)]_{x=0}^{x=1/3} - \frac{1}{n\pi} \int_0^{1/3} \sin(3n\pi x) dx$$

$$= 0 + \frac{1}{3(n\pi)^2} [\cos(3n\pi x)]_{x=0}^{x=1/3} = \frac{\cos(n\pi) - 1}{3(n\pi)^3} = \frac{(-1)^n - 1}{3(n\pi)^2}$$

samt

$$b_n = 3 \int_0^{1/3} x \sin(3n\pi x) dx = \frac{1}{n\pi} [x \sin(3n\pi x)]_{x=0}^{x=1/3} + \frac{1}{n\pi} \int_0^{1/3} \cos(3n\pi x) dx$$

$$= -\frac{\cos(n\pi)}{3n\pi} + \frac{1}{3(n\pi)^2} [\sin(3n\pi x)]_{x=0}^{x=1/3} = \frac{(-1)^{n+1}}{3n\pi}.$$

Alltså är

$$f(x) = \frac{1}{12} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{(-1)^n - 1}{3(n\pi)^2} \cos(3n\pi x) + \frac{(-1)^{n+1}}{3n\pi} \sin(3n\pi x) \right)$$

b) Om vi sätter  $x = 0$  i Fourierserien ovan får vi

$$f(0) = \frac{1}{12} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n - 1}{3(n\pi)^2} = \frac{1}{12} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{-2}{3(2k-1)^2 \pi^2} = \frac{1}{12} - \frac{2}{3\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} = \frac{1}{12} - \frac{2}{3\pi^2} S$$

Eftersom  $f(0) = 0$  får vi

$$S = \frac{3\pi^2}{2} \frac{1}{12} = \frac{\pi^2}{8}$$

3. Ansätt  $u(x, t) = v(x, t) + S(x)$  och sätt in i ekvationen och randvillkoren:

$$\begin{cases} \ddot{v}(x, t) - 4v''(x, t) - 4S''(x) = 1, & x \in (0, 1), \quad t > 0, \\ v(0, t) + S(0) = 1, \quad v(1, t) + S(1) = 0, & t \geq 0, \\ v(x, 0) + S(x) = 1 - x^2, & x \in (0, 1), \\ \dot{v}(x, 0) = 0, & x \in (0, 1). \end{cases}$$

Vi ser att om  $S(x)$  uppfyller

$$\begin{cases} S''(x) = -\frac{1}{4}, & x \in (0, 1), \\ S(0) = 1, \quad S(1) = 0 \end{cases}$$

så löser  $v(x, t)$  den homogena vågekvationen. Integration två gånger och insättning av randvillkoren ger att  $S(x) = -\frac{1}{8}x^2 - \frac{7}{8}x + 1$ .

$v(x, t)$  satisfierar nu den homogena vågekvationen,

$$\begin{cases} \ddot{v}(x, t) - 4v''(x, t) = 0, & x \in (0, 1), \quad t > 0, \\ v(0, t) = 0, \quad v(1, t) = 0, & t \geq 0, \\ v(x, 0) = 1 - x^2 - S(x) = \frac{7}{8}(x - x^2), & x \in (0, 1), \\ \dot{v}(x, 0) = 0, & x \in (0, 1). \end{cases}$$

För att bestämma  $v(x, t)$ , ansätt  $v(x, t) = X(x)T(t)$ . Insättning i differentialekvationen för  $v$  ger  $4X''(x)T(t) = X(x)T''(t)$  eller  $\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{4} \frac{T''(t)}{T(t)} = \lambda$ . Vi har sett att för vågekvationen med homogena randvillkor är  $\lambda < 0$ . Sätt därför  $\lambda = -\mu^2$ . Detta ger

$$\begin{cases} X''(x) + \mu^2 X(x) = 0, & 0 < x < 1, \\ X(0) = X(1) = 0. \end{cases} \quad T''(t) = -4\mu^2 T(t), \quad t > 0.$$

Lösningen för  $X(x)$  är då

$$X(x) = A \cos \mu x + B \sin \mu x.$$

$X(0) = 0 \implies A = 0$  och  $X(1) = 0 \implies B \sin \mu = 0 \implies \mu = n\pi$  (ty  $B = 0$  ger trivial lösning). Vi har alltså

$$\mu_n = -n\pi, \quad X_n(x) = B_n \sin n\pi x, \quad n = 1, 2, \dots$$

( $n = 0$  ger trivial lösning  $X(x) = 0$  och  $n < 0$  ger samma lösningar som  $n > 0$ ). För  $T(t)$  gäller då

$$T_n''(t) = -4\mu_n^2 T_n(t) \implies T_n(t) = C_n \cos(2n\pi t) + D_n \sin(2n\pi t), \quad n = 1, 2, \dots$$

Superposition ger den allmänna lösningen

$$v(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} (C_n \cos(2n\pi t) + D_n \sin(2n\pi t)) \sin(n\pi x).$$

Vi har också att

$$\dot{v}(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} (-2n\pi C_n \sin(2n\pi t) + 2n\pi D_n \cos(2n\pi t)) \sin(n\pi x).$$

Från begynnelsevillkoret  $\dot{v}(x, 0) = 0$  fås att  $D_n = 0$ ,  $n = 1, 2, \dots$  och villkoret för  $v(x, 0)$  ger

$$v(x, 0) = \frac{7}{8}(x - x^2) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin n\pi x,$$

och vi ser att  $C_n$  är Fourier-sinus koefficienter för funktionen  $\frac{7}{8}(x - x^2)$  på intervallet  $(0, 1)$ , vilka ges av

$$\begin{aligned} C_n &= 2 \int_0^1 \frac{7}{8}(x - x^2) \sin(n\pi x) dx = -\frac{7}{4} \left[ \frac{x - x^2}{n\pi} \cos(n\pi x) \right]_{x=0}^1 + \frac{7}{4n\pi} \int_0^1 (1 - 2x) \cos(n\pi x) dx \\ &= \frac{7}{4n\pi} \left[ \frac{1 - 2x}{n\pi} \sin(n\pi x) \right]_{x=0}^1 - \frac{7}{4(n\pi)^2} \int_0^1 (-2) \sin(n\pi x) dx = \frac{7}{2(n\pi)^2} \left[ -\frac{1}{n\pi} \cos(n\pi x) \right]_{x=0}^1 \\ &= \frac{7}{2(n\pi)^3} (1 - \cos(n\pi)) = \frac{7}{2} \frac{1 - (-1)^n}{(n\pi)^3} \end{aligned}$$

Alltså är lösningen

$$v(x, t) = \frac{7}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - (-1)^n}{(n\pi)^3} \cos(2n\pi t) \sin(n\pi x)$$

och

$$u(x, t) = S(x) + v(x, t) = -\frac{1}{8}x^2 - \frac{7}{8}x + 1 + \frac{7}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - (-1)^n}{(n\pi)^3} \cos(2n\pi t) \sin(n\pi x)$$

4. Vi låter  $\hat{u}_k \approx u(t_k) = u(k\Delta t)$  och approximerar derivatan på intervallet  $t_k \leq t < t_{k+1}$  med den finita differensen

$$u'(t) \approx \frac{\hat{u}_{k+1} - \hat{u}_k}{\Delta t},$$

där  $\Delta t$  är tidssteget. Enligt Crank-Nicolson-metoden approximerar vi också

$$\begin{aligned} u(t) &\approx \frac{1}{2} (\hat{u}_{k+1} + \hat{u}_k) \\ f(t) &\approx \frac{1}{2} (f(t_{k+1}) + f(t_k)) = \frac{1}{2} (f((k+1)\Delta t) + f(k\Delta t)) \end{aligned}$$

för  $t_k \leq t < t_{k+1}$ . Med  $f(t) = t$  har vi då  $t \approx \frac{1}{2} ((k+1)\Delta t + k\Delta t) = (k + \frac{1}{2})\Delta t$ . Genom insättning i ekvationen får vi alltså att

$$\frac{\hat{u}_{k+1} - \hat{u}_k}{\Delta t} + \frac{1}{2} (\hat{u}_{k+1} + \hat{u}_k) = (k + \frac{1}{2})\Delta t,$$

vilket leder till tidsstegningsschemat

$$\begin{cases} \hat{u}_{k+1} = \frac{1 - \frac{\Delta t}{2}}{1 + \frac{\Delta t}{2}} \hat{u}_k + \frac{k + \frac{1}{2}}{1 + \frac{\Delta t}{2}} \Delta t, & k = 0, 1, 2, \dots \\ \hat{u}_0 = u(0) = 0 \end{cases}$$

Med  $\Delta t = 1$  får vi ekvationen

$$\hat{u}_{k+1} = \frac{1}{3} \hat{u}_k + \frac{2}{3} \left( k + \frac{1}{2} \right)$$

och följande värden för  $\hat{u}_j$ ,  $j = 0, 1, 2$ :

$$\begin{aligned} \hat{u}_0 &= 0 \\ \hat{u}_1 &= 0 + \frac{2}{3} \left( 0 + \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{3} \\ \hat{u}_2 &= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \left( 1 + \frac{1}{2} \right) = \frac{10}{9} \end{aligned}$$

där  $\hat{u}_1 \approx u(1)$  och  $\hat{u}_2 \approx u(2)$ .

5.

a) För att  $f(x)$  skall vara ortogonal mot alla konstanta funktioner räcker det att  $\langle f, 1 \rangle_{L_2(0,2)} = 0$ , vilket ger att

$$0 = \langle f, 1 \rangle_{L_2(0,2)} = \int_0^2 (x^5 - ax^3) \cdot 1 \, dx = \left[ \frac{x^6}{6} - a \frac{x^4}{4} \right]_0^2 = \frac{64}{6} - a \frac{16}{4}$$

och därmed  $a = \frac{8}{3}$ .

b)  $L_2$ -projektionen  $Pf$  av  $f$  på  $\mathcal{P}^{(0)}(0,2)$  uppfyller  $(f - Pf) \perp v, \forall v \in \mathcal{P}^{(0)}(0,2)$ . Då funktionen  $v(x) = 1$  utgör en bas för  $\mathcal{P}^{(0)}(0,2)$ , ansätter vi  $Pf(x) = c$  med villkoret att  $\langle f - c, 1 \rangle = 0$ , vilket ger

$$0 = \langle f - c, 1 \rangle = \langle f, 1 \rangle - \langle c, 1 \rangle = 0 - \int_0^2 c \, dx = -2c$$

och alltså  $Pf(x) = c = 0$ .

6. Pga det inhomogena Dirichlet-randvillkoret söker vi lösningen  $u$  i mängden

$$V = \{v \in H^1(0,1) : v(0) = 0, v(1) = 5\} = \{v : \|v\| + \|v'\| < \infty, v(0) = 0, v(1) = 5\}$$

medan vi väljer testfunktioner från rummet

$$H_0^1 = \{v : \|v\| + \|v'\| < \infty, v(0) = v(1) = 0\}.$$

Vi multiplicerar alltså ekvationen med en testfunktion  $v \in H_0^1(0,1)$  och integrerar över  $[0,1]$ . Genom partialintegration och med hänsyn till randdata ( $v(0) = v(1) = 0$ ) får vi följande *variationsformulering*:

Finn  $u \in V$  så att

$$\int_0^1 (-u'v' + 3u'v) \, dx = \int_0^1 e^x v(x) \, dx, \quad \forall v \in H_0^1(0,1).$$

För att formulera motsvarande *Finita Element Metod* med  $cG(1)$ -metoden inför vi den likformiga partitionen  $\mathcal{T}_h$  av intervallet  $[0,1]$  med steglängd  $h$ . Vi söker sedan den approximativa lösningen  $U$  i mängden

$$V_h = \{v : v \text{ är styckvis linjär och kontinuerlig på } \mathcal{T}_h \text{ och } v(0) = 0, v(1) = 5\}.$$

medan testfunktionerna väljs från

$$V_h^0 = \{v : v \text{ är styckvis linjär och kontinuerlig på } \mathcal{T}_h \text{ och } v(0) = v(1) = 0\}.$$

*Finita element-formuleringen* lyder alltså:

Finn  $U \in V_h$  så att

$$\int_0^1 (-U'\varphi' + 3U'\varphi) \, dx = \int_0^1 e^x \varphi(x) \, dx, \quad \forall \varphi \in V_h^0,$$

7. Se kurslitteraturen, bladet om faltningar.

/TG