Matematik Chalmers

Tentamen i TMA683/TMA682 Tillämpad matematik K2/Bt2, 2018–04–04, kl 14:00-18:00

Telefon: Henrik Imberg, 031-772 5325; Kontaktperson: Mohammad Asadzadeh, 031-772 3517
Hjälpmedel: Endast tabell på baksidan av tesen. Kalkylator ej tillåten.
Betygsgränser, **3**: 20–29p, **4**: 30–39p och **5**: 40–50p
Lösningar/Granskning: Se kurshemsidan.

---

1. Använd Laplacetransformer för att lösa differentialekvationen (8p)

$$\begin{cases} y''(t) + 2y'(t) + y(t) = t, & t > 0 \\ y(0) = 0, \ y'(0) = 1 \end{cases}$$

2. a) Bestäm Fourierserien till den 2-periodiska funktionen (4p)

$$f(x) = \begin{cases} x + 1, & x \in [-1, 0) \\ 1 - x, & x \in [0, 1) \end{cases}$$

b) Bestäm sinus-serien för funktionen $g(x) = 1 - x, \quad x \in [0, 1]$. (3p)

c) Rita graferna för de två serierna i a) och b) för $x \in [-3, 3]$. Jämför och förklara skillnaderna. (2p)

3. Betrakta värmeledningsekvationen (10p)

$$\begin{cases} \dot{u}(x,t) - 2u''(x,t) = 0, & x \in (0,1), \quad t > 0, \\ u(0,t) = 1, \quad u(1,t) = 0, & t \geq 0, \\ u(x,0) = 1, & x \in [0,1]. \end{cases}$$

Använd variabelseparationsmetoden för att bestämma $u(x,t)$.

4. a) Visa, genom att använda definitionen, att funktionerna $\{x, \sin x, \cos x\}$ är linjärt oberoende på intervallet $x \in [0, \pi]$. (3p)

b) Tag fram en linjärkombination av de tre funktionerna som är ortogonal mot både $\sin x$ och $\cos x$ på det givna intervallet (och som inte är noll överallt). (3p)

5. Härled *variationsformulering* och *finita element-formulering* för den styckvis linjära finita-element-approximationen för randvärdesproblemet (9p)

$$\begin{cases} 2u''(x) + u(x) = 1, & x \in [0,1], \\ u'(0) = 0, \\ u(1) = 0, \end{cases} .$$

Härled också det motsvarande linjära ekvationssystemet för en likformig partition $\mathcal{T}_h$ av intervallet $[0, 1]$ med steglängd $h = 1/3$.

6. a) Antag att $\omega \in \mathbb{R}$. Visa att följande Laplacetransformer gäller: (4p)

$$\mathcal{L}[\cos(\omega t)](s) = \frac{s}{s^2 + \omega^2} \qquad \mathcal{L}[\sin(\omega t)](s) = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}.$$

b) Visa att om funktionen F är periodisk med perioden P så är $\int_a^{a+P} F(x)dx$ oberoende av a. (4p)

LYCKA TILL!
/TG

Tabell med Laplacetransformer och trigonometriska formler

$f(t)$	$F(s)$
$af(t)+bg(t)$	$aF(s)+bG(s)$
$tf(t)$	$-F'(s)$
$t^n f(t)$	$(-1)^n F^{(n)}(s)$
$e^{-at}f(t)$	$F(s+a)$
$f(t-T)\theta(t-T)$	$e^{-Ts}F(s)$
$f'(t)$	$sF(s)-f(0)$
$f''(t)$	$s^2F(s)-sf(0)-f'(0)$
$f^{(n)}(t)$	$s^nF(s)-\sum_{k=1}^{n} s^{n-k}f^{(k-1)}(0)$
$\int_0^t f(\tau)\,d\tau$	$\frac{F(s)}{s}$
$\theta(t)$	$\frac{1}{s}$
$\frac{t^n}{n!}$	$\frac{1}{s^{n+1}}$
e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$
$\cosh at$	$\frac{s}{s^2-a^2}$
$\sinh at$	$\frac{a}{s^2-a^2}$
$\cos bt$	$\frac{s}{s^2+b^2}$
$\sin bt$	$\frac{b}{s^2+b^2}$
$\frac{t}{2b}\sin bt$	$\frac{s}{(s^2+b^2)^2}$
$\frac{1}{2b^3}(\sin bt - bt\cos bt)$	$\frac{1}{(s^2+b^2)^2}$

$2\sin a\sin b=\cos(a-b)-\cos(a+b)$
$2\sin a\cos b=\sin(a-b)+\sin(a+b)$
$2\cos a\cos b=\cos(a-b)+\cos(a+b)$

TMA683/TMA682 Tillämpad matematik K2/Bt2, 2018–04–04, kl 14:00-18:00.
Lösningar.

---

1. Laplacetransformering med $y(0) = 0$ och $y'(0) = 1$ ger, eftersom $\mathcal{L}[t] = \frac{1}{s^2}$ enligt tabellen,

$$s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) + 2sY(s) - 2y(0) + Y(s) = \frac{1}{s^2} \Longrightarrow$$
$$(s^2 + 2s + 1)Y(s) = 1 + \frac{1}{s^2} \Longrightarrow Y(s) = \frac{1}{(s+1)^2} + \frac{1}{s^2(s+1)^2} = \frac{s^2+1}{s^2(s+1)^2}$$

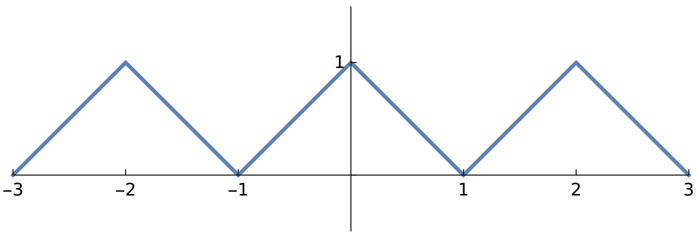
Partialbråksuppdelning ger

$$\frac{s^2+1}{s^2(s+1)^2} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{s+1} + \frac{D}{(s+1)^2}$$

där B kan bestämmas med handpåläggning (förläng med s^2 och sätt $s = 0$) till $B = 1$. På motsvarande sätt blir $D = 2$. A och C bestäms genom att multiplicera ihop och identifiera koefficienter till $A = -2$ och $C = 2$. Alltså är

$$Y(s) = -\frac{2}{s} + \frac{1}{s^2} + \frac{2}{s+1} + \frac{2}{(s+1)^2} \Longrightarrow$$
$$y(t) = -2 + t + 2e^{-t} + 2te^{-t},\ t \geq 0$$

där vi använt att $\mathcal{L}[\theta(t)] = \frac{1}{s}$, $\mathcal{L}[e^{-t}] = \frac{1}{s+1}$, $\mathcal{L}[t] = \frac{1}{s^2}$, $\mathcal{L}[te^{-t}] = \frac{1}{(s+1)^2}$ (enligt första förskjutningsregeln).



Figur 1. Funktionen $f(x)$ med perioden 2.

2. a) Från figur 1 ser vi att funktionen $f(x)$ är jämn. Alltså är $b_n = 0,\ n = 1, 2, \ldots$ och

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

med

$$a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\,dx, \quad n = 0, 1, \ldots$$

där perioden är $2L = 2$, dvs $L = 1$. Vi har att

$$a_0 = 2\int_0^1 f(x)\,dx = 2\int_0^1 (1-x)\,dx = [-(1-x)^2]_{x=0}^1 = 1$$

och, för $n = 1, 2, \ldots,$

$$a_n = 2\int_0^1 (1-x)\cos(n\pi x)\,dx = \frac{2}{n\pi}\big[(1-x)\sin(n\pi x)\big]_{x=0}^{x=1} + \frac{2}{n\pi}\int_0^1 \sin(n\pi x)\,dx$$
$$= 0 + \frac{2}{(n\pi)^2}\big[-\cos(n\pi x)\big]_{x=0}^{x=1} = 2\frac{1-\cos(n\pi)}{(n\pi)^2} = 2\frac{1-(-1)^n}{(n\pi)^2}$$

Alltså är Fourierserien

$$f(x) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} 2\frac{1-(-1)^n}{(n\pi)^2}\cos(n\pi x) = \frac{1}{2} + \frac{4}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}\cos((2k-1)\pi x)$$

b) Sinus-serien för $g(x)$ ges av

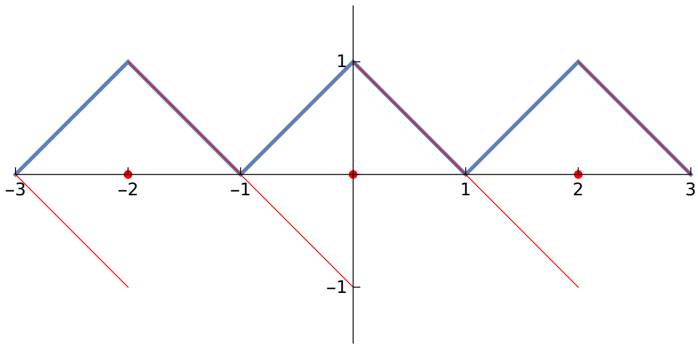
$$G(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

där $L = 1$ och

$$b_n = 2\int_0^1 g(x)\sin(n\pi x)\ dx = 2\int_0^1 (1-x)\sin(n\pi x)\ dx = \frac{2}{n\pi}\left[-(1-x)\cos(n\pi x)\right]_{x=0}^{x=1} - \frac{2}{n\pi}\int_0^1 \cos(n\pi x)\ dx$$
$$= \frac{2}{n\pi} + \frac{2}{(n\pi)^2}\left[\sin(n\pi x)\right]_{x=0}^{x=1} = \frac{2}{n\pi}.$$

för $n = 1, 2, \ldots$. Alltså är sinus-serien

$$G(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n\pi}\sin(n\pi x)$$



FIGUR 2. Graferna för Fourier-serierna i uppgift 2 a) (blå) och 2 b) (röd).

c) Graferna för de två serierna är ritade i figur 2. De är lika på intervallet $(0, 1]$, men skiljer sig åt genom att sinus-serien motsvarar en udda utvidgning av funktionen till intervallet $[-1, 0)$, medan funktionen $f(x)$ är jämn.

3. Ansätt $u(x,t) = v(x,t) + S(x)$ och sätt in i ekvationen och randvillkoren:

$$\begin{cases} \dot{v}(x,t) - 2v''(x,t) - 2S''(x) = 0, & x \in (0,1), \quad t > 0, \\ v(0,t) + S(0) = 1, \quad v(1,t) + S(1) = 0, & t \geq 0, \\ v(x,0) + S(x) = 1, & x \in (0,1). \end{cases}$$

Vi ser att om $S(x)$ uppfyller

$$\begin{cases} S''(x) = 0, & x \in (0,1), \\ S(0) = 1, \quad S(1) = 0 \end{cases}$$

så löser $v(x,t)$ den homogena värmeledningsekvationen med homogena randvillkor. Integration två gånger och insättning av randvillkoren ger att $S(x) = 1 - x$

$v(x,t)$ satisfierar nu den homogena värmeledningsekvationen,

$$\begin{cases} \dot{v}(x,t) - 2v''(x,t) = 0, & x \in (0,1), \quad t > 0, \\ v(0,t) = 0, \quad v(1,t) = 0, & t \geq 0, \\ v(x,0) = 1 - S(x) = x, & x \in (0,1). \end{cases}$$

För att bestämma $v(x,t)$, ansätt $v(x,t) = X(x)T(t)$. Insättning i differentialekvationen för v ger $2X''(x)T(t) = X(x)T'(t)$ eller $\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{2}\frac{T'(t)}{T(t)} = \lambda$. Vi har sett att för värmeledningsekvationen med homogena randvillkor är $\lambda < 0$. Sätt därför $\lambda = -\mu^2$. Detta ger

$$\begin{cases} X''(x) + \mu^2 X(x) = 0, & 0 < x < 1, \\ X(0) = X(1) = 0. \end{cases} \qquad T'(t) = -2\mu^2 T(t), \quad t > 0.$$

Lösningen för $X(x)$ är då

$$X(x) = A\cos\mu x + B\sin\mu x.$$

$X(0) = 0 \Longrightarrow A = 0$ och $X(1) = 0 \Longrightarrow B\sin\mu = 0 \quad \Longrightarrow \mu = n\pi$ (ty $B = 0$ ger trivial lösning). Vi har alltså

$$\mu_n = -n\pi, \qquad X_n(x) = B_n \sin n\pi x, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

($n = 0$ ger trivial lösning $X(x) = 0$ och $n < 0$ ger samma lösningar som $n > 0$). För $T(t)$ gäller då

$$T_n'(t) = -2\mu_n^2 T_n(t) \Longrightarrow T_n(t) = C_n \exp(-2(n\pi)^2 t), \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Superposition ger den allmänna lösningen

$$v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \exp(-2(n\pi)^2 t)\sin(n\pi x).$$

Begynnelsevillkoret $v(x,0) = x$ ger

$$x = v(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin(n\pi x),$$

och vi ser att C_n är Fourier-sinus koefficienter för funktionen $v(x,0) = x$ på intervallet $(0,1)$, vilka ges av

$$\begin{aligned} C_n &= 2\int_0^1 x\sin(n\pi x)\,dx = \frac{2}{n\pi}\left[-x\cos(n\pi x)\right]_{x=0}^1 + \frac{2}{n\pi}\int_0^1 \cos(n\pi x)\,dx \\ &= -\frac{2(-1)^n}{n\pi} + \frac{2}{(n\pi)^2}\left[\sin(n\pi x)\right]_{x=0}^1 = \frac{2(-1)^{n+1}}{n\pi} \end{aligned}$$

Alltså är lösningen

$$v(x,t) = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n\pi} e^{-2(n\pi)^2 t}\sin(n\pi x)$$

och

$$u(x,t) = S(x) + v(x,t) = 1 - x + 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n\pi}\sin(n\pi x)$$

4. a) Funktionerna är linjärt oberoende om ekvationen

$$\lambda_1 x + \lambda_2 \sin x + \lambda_3 \cos x = 0 \tag{1}$$

endast har lösningen $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ (där ekvationen skall gälla för alla $x \in [0,\pi]$). Genom insättning av värdena $x = 0, \pi/2, \pi$ i (1) fås de tre ekvationerna

$$\begin{aligned} \lambda_3 &= 0 \\ \lambda_1 \frac{\pi}{2} + \lambda_2 &= 0 \\ \lambda_1 \pi + \lambda_3 &= 0 \end{aligned}$$

vilka har den enda lösningen $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.

b) En linjärkombination av de tre funktionerna ges av

$$F(x) = \lambda_1 x + \lambda_2 \sin x + \lambda_3 \cos x.$$

Vi vill bestämma koefficienterna så att

$$\langle F(x), \sin x\rangle = 0 \text{ och } \langle F(x), \cos x\rangle = 0.$$

Vi ser att det går att multiplicera $F(x)$ med ett godtyckligt tal och att dessa villkor ändå är uppfyllda. Vi kan därför välja $\lambda_1 = 1$. Vi har då (använd formlerna på formelbladet för att beräkna integralerna)

$$0 = \langle F(x), \sin x\rangle = \int_0^\pi x \sin x dx + \lambda_2 \int_0^\pi \sin x \sin x dx + \lambda_3 \int_0^\pi \cos x \sin x dx = \pi + \lambda_2 \frac{\pi}{2} \Longrightarrow \lambda_2 = -2$$

och

$$0 = \langle F(x), \cos x\rangle = \int_0^\pi x \cos x dx + \lambda_2 \int_0^\pi \sin x \cos x dx + \lambda_3 \int_0^\pi \cos x \cos x dx = -2 + \lambda_3 \frac{\pi}{2} \Longrightarrow \lambda_3 = \frac{4}{\pi}.$$

Alltså är linjärkombinationen

$$F(x) = x - 2\sin x + \frac{4}{\pi}\cos x$$

ortogonal mot både $\sin x$ och $\cos x$.

5. Multiplicera ekvationen med en testfunktion $v \in V$, där

$$V = \{v : ||v||_{L_2(0,1)} + ||v'||_{L_2(0,1)} < \infty,\ v(1) = 0\}$$

och integrera över $[0,1]$. Genom partialintegration och med hänsyn till randdata får vi följande *variationsproblem*: Finn $u \in V$ så att

$$\int_0^1 (-2u'v' + uv)dx = \int_0^1 v dx, \quad \forall v \in V. \tag{2}$$

En motsvarade *Finita Element Metod* med *cG*(1)-metoden (styckvis linjära basfunktioner) formuleras som: Hitta $U \in V_h$ så att

$$\int_0^1 (-2U'v' + Uv)dx = \int_0^1 v dx, \quad \forall v \in V_h \tag{3}$$

där

$$V_h = \big\{v : v \text{ är styckvis linjär och kontinuerlig i en partition av } [0,1] \text{ med steglängd } h,\ v(1) = 0\big\}.$$

Vi ansätter $U(x) = \xi_0\varphi_0(x) + \xi_1\varphi_1(x) + \xi_2\varphi_2(x)$ där

$$\varphi_j(x) = \begin{cases} \frac{1}{h}(x - x_{j-1}), & x \in [x_{j-1}, x_j) \\ \frac{1}{h}(x_j - x), & x \in [x_j, x_{j+1}) \\ 0, & \text{annars} \end{cases}, \qquad j = 0,1,2$$

är hattfunktionerna svarande mot nodpunkterna $x_j = j/3$, $j = 0,1,2$. Notera att φ_0 är en "halv hatt".

Vi sätter in $U(x) = \xi_0\varphi_0(x) + \xi_1\varphi_1(x) + \xi_2\varphi_2(x)$ i (3) och väljer testfunktioner $\varphi = \varphi_i$, $i = 0,1,2$. Vi får då ekvationssystemet

$$(-2A + M)\,\xi = b,$$

där A är styvhetsmatrisen med element $A_{ij} = \int_0^1 \varphi_i'\varphi_j' dx$, $i,j = 0,1,2$, och M är massmatrisen med element $M_{ij} = \int_0^1 \varphi_i\varphi_j dx$, $i,j = 0,1,2$. b är högerledsvektorn med element $b_i = \int_0^1 \varphi_i dx$, $i = 0,1,2$ och $\xi = (\xi_0, \xi_1, \xi_2)^T$ är lösningsvektorn. För enkelhets skull numrerar vi här matriselementen från 0 till 2.

Beräkning av matriselementen ger $A_{ii} = 2/h$, $A_{i,i\pm1} = -1/h$, $i = 1,2$ och $A_{00} = 1/h$ (halv hatt), samt $M_{ii} = 2h/3$, $M_{i,i\pm1} = h/6$, $i = 1,2$ och $M_{00} = h/3$ och resten nollor. För högerledsvektorn får vi $b_i = h$, $i = 1,2$ och $b_0 = h/2$. Detta ger

$$\left(-\frac{2}{h}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} + \frac{h}{6}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} \xi_0 \\ \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix} = h\begin{bmatrix} 1/2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

eller, med $h = 1/3$,

$$-\frac{1}{18}\begin{bmatrix} -106 & 109 & 0 \\ 109 & -212 & 109 \\ 0 & 109 & -212 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \xi_0 \\ \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/6 \\ 1/3 \\ 1/3 \end{bmatrix}$$

(Lösningen är $\xi \approx (-0.3135, -0.2774, -0.1709)^T$.)

6. Se kompendiet om Fourierserier och Laplacetransformer.

/TG