

TMA683 Teorifrågor inför tentamen HT2017

1. (Fourier: exempel 1:4) Antag $\omega \in \mathbb{R}$. Visa att följande Laplacetransformer gäller:

$$\mathcal{L}[\cos(\omega t)](s) = \frac{s}{s^2 + \omega^2} \quad \mathcal{L}[\sin(\omega t)](s) = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}.$$

2. Antag att $f(t) = 0$, $g(t) = 0$ för $t < 0$, och definiera faltningen

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(t - \tau)g(\tau)d\tau.$$

Visa att $\mathcal{L}[f * g](s) = F(s)G(s)$.
(se separat material på hemsidan)

3. (Fourier: Sats 1:4) Formulera och bevisa "andra förskjutningslagen" för Laplacetransformer:

$$\mathcal{L}[f(t - T)\theta(t - T)] = e^{-Ts}F(s).$$

4. (Fourier: Sats 1:7) Visa att följande Laplacetransformer gäller:

$$\begin{aligned} a) \quad \mathcal{L}[f'(t)](s) &= sF(s) - f(0), \\ b) \quad \mathcal{L}[f''(t)](s) &= s^2F(s) - sf(0) - f'(0). \end{aligned}$$

5. (Fourier: Lemma 2:1) Visa att om funktionen F är periodisk med perioden P , så är

$$\int_a^{a+P} F(x) dx$$

oberoende av a .

6. (Fourier, sats 2:9 (Bessels olikhet)) Visa att om funktionen f är 2π -periodisk och integrerbar på $[-\pi, \pi]$ och C_n är de komplexa Fourierkoefficienterna till f , så är

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |C_n|^2 \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(\theta)|^2 d\theta.$$

7. Formulera och bevisa *Riemann-Lebesgues lemma*. (Fourier: Lemma 2:4)

8. (Sats 5.1:(1)) Antag att $f \in C^2(a, b)$. Visa att det finns en konstant C , oberoende av f och intervallet (a, b) , så att vi för den linjära interpolanten $\pi_1 f$ på $[a, b]$ har följande feluppskattning:

$$\|\pi_1 f - f\|_{L_\infty(a,b)} \leq C(b-a)^2 \|f''\|_{L_\infty(a,b)}$$

9. (Sats 3.6) Betrakta randvärdesproblemet

$$(BVP) \quad \begin{cases} -(a(x)u'(x))' = f, & 0 < x < 1, \\ u(0) = u(1) = 0, & . \end{cases}$$

där $f \in C(0, 1)$ och $a \in C^1(0, 1)$. Ange en variationsformulering (VF) för (BVP) och visa att

$$(BVP) \iff (VF) \text{ och } u \in C^2(0, 1).$$

10. Formulera och bevisa *Poincarés olikhet* på ett intervall $[0, L]$ (sats 3.3, en-dimensionella fallet).
11. (Sats 7.1 och 7.2, med $a(x) = 1$) Betrakta den partiella differentialekvationen

$$(BVP) \quad \begin{cases} -u''(x) = f, & 0 < x < 1, \\ u(0) = u(1) = 0, & . \end{cases}$$

Låt $V_h^0 := \{v : v \text{ är styckvis linjär och kontinuerlig på } [0, 1], \text{ med } v(0) = v(1) = 0\}$. och visa att finita element-lösningen $U \in V_h^0$ är den bästa approximativa lösningen av (BVP) i energinormen

$$\|w\|_E = \|w'\|_{L_2} = \left(\int_0^1 |w'(x)|^2 dx \right)^{1/2},$$

dvs visa att

$$\|u - U\|_E \leq \|u - v\|_E, \quad \forall v \in V_h^0.$$

Använd också detta resultat för att visa *a priori*-feluppskattningen

$$\|u - U\|_E \leq C_i \|hu''\|_{L_2}.$$

12. (Sats 9.1) Betrakta den partiella differentialekvationen

$$\begin{cases} \dot{u} - u'' = f(x), & 0 < x < 1, \quad t > 0, \\ u(0, t) = u(1, t) = 0, & u(x, 0) = u_0(x). \end{cases}$$

Visa följande stabilitetsolikheter:

$$a) \quad \|u(\cdot, t)\| \leq \|u_0\| + \int_0^t \|f(\cdot, s)\| ds,$$

$$b) \quad \|u_x(\cdot, t)\|^2 \leq \|u'_0\|^2 + \int_0^t \|f(\cdot, s)\|^2 ds.$$

13. (Sats 9.2) Betrakta den partiella differentialekvationen

$$\begin{cases} \dot{u} - u'' = 0, & 0 < x < 1, \quad t > 0, \\ u(0, t) = u'(1, t) = 0, & t > 0 \\ u(x, 0) = u_0(x) & 0 < x < 1. \end{cases}$$

Visa följande stabilitets(o)likheter:

$$(a) \quad \frac{d}{dt} \|u\|^2 + 2\|u'\|^2 = 0. \quad (b) \quad \|u(\cdot, t)\| \leq e^{-t} \|u_0\|.$$

14. (Sats 9.5) Betrakta följande en-dimensionella vågekvation:

$$\begin{cases} \ddot{u} - u'' = 0, & 0 < x < 1, \quad t > 0, \\ u(0, t) = u(1, t) = 0, \\ u(x, 0) = u_0(x), & \dot{u}(x, 0) = v_0(x). \end{cases}$$

Visa att den totala energin är konstant (konservering av energin). Dvs, visa att

$$\frac{1}{2} \|\dot{u}\|^2 + \frac{1}{2} \|u'\|^2 = \text{konstant}.$$