

TMA683

Tillämpad matematik för K och Bt, 2018

Inlämningsuppgift

1 Problemformulering.

Vi ska studera materialtransport av ett salt löst i vatten i en endimensionell kanal av längd L (m). Diffusiviteten för saltet i vattnet är D (m²/s) och vattnet strömmar genom kanalen med en hastighet c (m/s). Salt tillförs genom kanalens väggar med en intensitet f (mol/ms). I ändarna av kanalen finns filter genom vilka fluxet av salt är proportionellt mot koncentrationen med proportionalitetskonstanter k_0 respektive k_X (m/s). Vid tiden $t = 0$ är koncentrationen av salt i kanalen u_0 .

Detta beskrivs matematiskt av modellen

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) + c \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) - D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) = f(x, t), \quad 0 < x < L, \quad 0 < t \leq T, \quad (1a)$$

$$D \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = k_0 u(0, t) + cu(0, t), \quad 0 < t \leq T, \quad (1b)$$

$$D \frac{\partial u}{\partial x}(L, t) = -k_X u(L, t) + cu(L, t), \quad 0 < t \leq T, \quad (1c)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad 0 < x < L, \quad (1d)$$

där $u(x, t)$ är koncentrationen av salt (mol/m) och T är en sluttid.

2 Uppgifter

2.1 Teoretisk del, inlämnas senast 7 december.

Uppgift: Härled variationsformulering, finita elementformulering, och tidsstegningsschema (jämför Studio II) för problem (1a)-(1d).

Tips: Randvillkoren (1b) och (1c) kommer ge upphov till ännu en matris (med bara två nollskilda element) i det diskreta ekvationssystemet.

Instruktioner för inlämning av denna del

Datorskrivna lösningar eller inscannade handskrivna lösningar laddas upp i PingPong i pdf-format senast fredag 7/12. Endast en lösning per grupp skall lämnas in. Skriv namn och personnummer på alla gruppmedlemmar. Resultat meddelas i ping-pong.

Vid behov ges möjlighet till en komplettering som ska lämnas in senast onsdag 19/12.

2.2 Praktisk del, inlämnas senast 21 december.

Uppgift:

(a) Implementera tidsstegningschemat från 2.1 i Matlab.

(b) Välj $L = 1$, $T = 2$, $D = 1$, $u_0(x) = 10x(1 - x)$, och

$$f(x, t) = \begin{cases} 100 \exp(-100(x - 1/4)^2), & t \leq 1, \\ 0, & t > 1. \end{cases}$$

Använd er kod för att studera konvektionens och randvillkorens kvalitativa inverkan på lösningens beteende. Intressanta värden att studera är till exempel olika kombinationer av $c = 0, 1, 10, -10$, $k_0 = 0, 1, 10^5$, och $k_X = 0, 1, 10^5$. Betrakta åtminstone fem olika fall.

Skapa animeringar av resultaten med hjälp av nedanstående kod. Resonera kring den fysikaliska rimligheten av era resultat.

Instruktioner för inlämning av denna del

Animeringar, pdf-dokument med resonemang och analys av resultaten, samt Matlabkod laddas upp i PingPong senast fredag 21/12, lämpligtvis i en zip-fil. Endast en inlämning per grupp. Skriv alla gruppmedlemmarnas namn och personnummer i dokumentet. Resultat meddelas i ping-pong.

Vid behov ges möjlighet till en komplettering som ska lämnas in senast onsdag 23 januari 2019.

Matlabkod för animering:

```
videoname = % Ange namn som en textsträng
vidobj = VideoWriter(videoname);
vidobj.FrameRate = 10;
open(vidobj)
for % Loop över tidsstegen
    % Plotta resultat vid tidssteget
    writeVideo(vidobj, getframe(gcf))
end
close(vidobj)
```