Matematik Chalmers

Tentamen i TMA683 Tillämpad matematik K2/Bt2, 2016–04–02; KL 8:30-12:30

Telefon: Edvin Wedin: ankn 5325
Hjälpmedel: Endast utdelad (vänd textlappen) tabell. Kalkylator ej tillåten.
Varje uppgift ger max 5 poäng.
Betygsgränser, **3**: 12-17p, **4**: 18-23p och **5**: 24p- Lösningar/Granskning: Se Hemsidan, kursdagbok.

---

1. Sök med Laplacetransformation en funktion $y(t)$ som satisfierar ekvationen

$$y''(t) - 2y(t) = 8\cos t \sinh t, \qquad y(0) = y'(0) = 0.$$

2. Bevisa en a priori feluppskattning för $cG(1)$-finitelementlösning av randvärdesproblemet

$$-u''(x) + bu'(x) + u(x) = f(x), \quad x \in I := [0,1]; \qquad u(0) = u(1) = 0, \qquad b > 0,$$

i energinormen: $||v||_E$ med $||v||_E^2 = ||v||^2_{L_2(I)} + ||v'||^2_{L_2(I)}$. För vilka b värden är felet optimalt?

3. Funktionen $f(x),\ x \in [0,\pi]$ är definierad enligt

$$f(x) = \begin{cases} \sin x, & 0 \le x < \pi/2 \\ 0, & \pi/2 < x \le \pi. \end{cases}$$

Utveckla $f(x)$ i cosinusserie med perioden 2π. Ange speciellt de 6 första termerna i serien som är $\neq 0$.

4. Betrakta randvärdesproblemet:

$$(1) \qquad -u''(x) = 2, \quad 0 < x < 1, \qquad u'(0) = u'(1) = 1.$$

Låt $x_0 = 0$, $x_1 = 1/2$ och $x_2 = 1$ vara en partition av intervallet $[0,1]$ och V_h, $(h = 1/2)$ motsvarande finitelement funktionsrum bestående av styckvis kontinuerlig, linjära funktioner.

(a) Bestäm den exakta lösningen till (1) .

(b) Beräkna, om möjligt, en finitelement approximation $U \in V_h$ av u.

(c) Förklara varför problemet i (1) kallas *illa ställd*?

5. Använd variabelseparationsmetoden och lös ekvationen

$$\begin{cases} u_t - c^2 u_{xx} = 0, & 0 < x < 1, \quad t > 0 \\ u(0,t) = u(1,t) = 0, & t > 0 \\ u(x,0) = \sin(\pi x) + \frac{1}{2}\sin(3\pi x), & 0 < x < 1. \end{cases}$$

6. Formulera och bevisa *Bessel's olikhet* (I).

LYCKA TILL!

MA

Table of Laplace Transforms and trigonomerty

$f(t)$	$F(s)$
$af(t)+bg(t)$	$aF(s)+bG(s)$
$tf(t)$	$-F'(s)$
$t^n f(t)$	$(-1)^n F^{(n)}(s)$
$e^{-at}f(t)$	$F(s+a)$
$f(t-T)\theta(t-T)$	$e^{-Ts}F(s)$
$f'(t)$	$sF(s)-f(0)$
$f''(t)$	$s^2F(s)-sf(0)-f'(0)$
$f^{(n)}(t)$	$s^nF(s)-\sum_{k=1}^{n} s^{n-k}f^{(k-1)}(0)$
$\int_0^t f(\tau)\,d\tau$	$\frac{F(s)}{s}$
$\theta(t)$	$\frac{1}{s}$
$\frac{t^n}{n!}$	$\frac{1}{s^{n+1}}$
e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$
$\cosh at$	$\frac{s}{s^2-a^2}$
$\sinh at$	$\frac{a}{s^2-a^2}$
$\cos bt$	$\frac{s}{s^2+b^2}$
$\sin bt$	$\frac{b}{s^2+b^2}$
$t\sin bt/(2b)$	$s/(s^2+b^2)^2$
$(f\star g)(t)=\int_0^t f(t)g(t-\tau)\,d\tau$	$F(s)G(s)$
$2\sin a\sin b \quad =$	$=\cos(a-b)-\cos(a+b)$
$2\sin a\cos b \quad =$	$=\sin(a-b)+\sin(a+b)$
$2\cos a\cos b \quad =$	$=\cos(a-b)+\cos(a+b)$

TMA683 Tillämpad matematik K2/Bt2, 2016–04–02; KL 8:30-12:30. Lösningar.

---

1. Observera att : $y(0-)=y'(0-)=0$, och högerledet är $8\cos t\sinh t=4(e^t\cos t-e^{-t}\cos t)$. Laplacetransformering av ekvationen ger

$$s^2Y(s)-2Y(s)=4\Big[\frac{s-1}{(s-1)^2+1}-\frac{s+1}{(s+1)^2+1}\Big],$$

dvs

$$(s^2-2)Y(s)=4\frac{(s-1)[(s+1)^2+1]-(s+1)[(s-1)^2+1]}{[(s-1)^2+1][(s+1)^2+1]}=4\frac{2(s^2-2)}{[(s-1)^2+1][(s+1)^2+1]}$$

Vi anväder partialbråksuppdelning

$$Y(s)=\frac{As+B}{s^2-2s+2}+\frac{Cs+D}{s^2+2s+2}.$$

och därmed, genom identifiering av koefficienter, får ekvationssystemet:

$$\begin{cases} A & & +C & & =0 & (I); & \text{koeff.} & s^3\\ 2A & +B & -2C & +D & =0 & (II); & \text{koeff.} & s^2\\ 2A & +2B & +2C & -2D & =0 & (III); & \text{koeff.} & s^1\\ & 2B & & +2D & =8 & (IV); & \text{koeff.} & s^0. \end{cases}$$

$(III)-2(I)\Longrightarrow B=D$. Nu från (IV) får vi att $B=D=2$. Vidare $(I)\Longrightarrow C=-A$, så

$$\begin{cases} A & +C & =0 & (I)\\ 4A & +4 & =0 & (II') \end{cases}\Longrightarrow A=-1,\ \ C=1.$$

Alltså

$$\begin{aligned}Y(s)&=\frac{-s+2}{(s-1)^2+1}+\frac{s+2}{(s+1)^2+1}\\ &=-\frac{s-1}{(s-1)^2+1}+\frac{1}{(s-1)^2+1}+\frac{s+1}{(s+1)^2+1}+\frac{1}{(s+1)^2+1}.\end{aligned}$$

Därmed

$$y(t)=(-\cos t+\sin t)e^t+(\cos t+\sin t)e^{-t}=2(\sin t\cosh t+\cos t\sinh t),\quad t>0.$$

2. Multiplicera ekvationen med en testfunktion $v\in H_0^1=\{v:||v||_E<\infty,\ v(0)=v(1)=0\}$, patialintegrera över I och använd randdata för att får *variationsformulering*: Finn $u\in H_0^1(I)$ så att

$$\int_I(u'v'+bu'v+uv)=\int_I fv,\quad \forall v\in H_0^1(I). \tag{2}$$

En *Finitelement Metod* med $cG(1)$ kan formuleras som: Finn $U\in V_h^0$ så att

$$\int_I(U'v'+bU'v+Uv)=\int_I fv,\quad \forall v\in V_h^0\subset H_0^1(I), \tag{3}$$

där

$$V_h^0=\{v: v \text{ styckvis linjär och kontinuerlig i en partition av } I,\ v(0)=v(1)=0\}.$$

Låt $e=u-U$, då (2)-(3) ger att

$$\int_I(e'v'+be'v+ev)=0,\quad \forall v\in V_h^0,\qquad \text{(Galerkin Ortogonalitet)}. \tag{4}$$

Observera att $e(0)=e(1)=0\Longrightarrow$

$$\int_I e'e=\frac12\int_I\frac{d}{dx}(e^2)=\frac12(e^2)|_0^1=0. \tag{5}$$

A priori feluppskattning: Vi använder (4) och (5) och skriver

$$
\begin{aligned}
\|e\|_{H_0^1} &= \|e'\|^2_{L_2(I)} + \|e\|^2_{L_2(I)} = \int_I (e'e' + ee) = \{(5)\} = \int_I (e'e' + be'e + ee) \\
&= \int_I \Big(e'(u-U)' + be'(u-U) + e(u-U) \Big) = \{v = \pi_h u - U \text{ i } (4)\} \\
&= \int_I \Big(e'(u-\pi_h u)' + be'(u-\pi_h u) + e(u-\pi_h u) \Big) \quad \le \{\text{enligt C-S}\} \le \\
&\le \|(u-\pi_h u)'\|\|e'\| + b\|u-\pi_h u\|\|e'\| + \|u-\pi_h u\|\|e\| \\
&\le \{\|(u-\pi_h u)'\| + (1+b)\|u-\pi_h u\|\}\|e\|_{H^1} \le C_i\{\|hu''\| + (1+b)\|h^2u''\|\}\|e\|_{H^1}.
\end{aligned}
$$

Alltså har vi följande a priori feluppskattning:

$$\|e\|_{H_0^1} \le C_i\{\|hu''\| + (1+b)\|h^2u''\|\}.$$

Felet är minimalt om $b \equiv 0$.

3. För utveckling av $f(x)$ i cosinusserie definierar vi $f(x)$ även för $t \le 0$ så att $f(x)$ blir en jämn funktion. Vi har då

$$f(x) \sim \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx,$$

där, för $k \neq 1$,

$$
\begin{aligned}
\pi a_k &= 2\int_0^{\pi/2} sinx \cos(kx)\,dx = \int_0^{\pi/2} \Big(\sin(k+1)x - \sin(k-1)x\Big)\,dx \\
&= \Big[\frac{\cos(k-1)x}{k-1} - \frac{\cos(k+1)x}{k+1}\Big]_0^{\pi/2} = \frac{\cos(k-1)\pi/2}{k-1} - \frac{\cos(k+1)\pi/2}{k+1} - \frac{1}{k-1} + \frac{1}{k+1}.
\end{aligned}
$$

Då är

$$\pi a_{2n} = \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n-1} = -\frac{2}{4n^2-1},$$

och

$$\pi a_{2n+1} = \frac{\cos n\pi - 1}{2n} - \frac{\cos(n+1)\pi - 1}{2n+2} = \frac{(-1)^n - 1}{2n} - \frac{(-1)^{n+1} - 1}{2n+2},$$

vilket betyder att

$$\pi a_{4m+1} = \frac{(-1)^{2m} - 1}{4m} - \frac{(-1)^{2m+1} - 1}{4m+2} = \frac{1}{2m+1}$$

och

$$\pi a_{4m+3} = \frac{(-1)^{2m+1} - 1}{4m+2} - \frac{(-1)^{2m+2} - 1}{4m+4} = -\frac{1}{2m+1}.$$

Vidare är

$$\pi a_1 = 2\int_0^{\pi/2} \sin x \cos x\,dx = \int_0^{\pi/2} \sin 2x\,dx = \Big[-\frac{\cos 2x}{2}\Big]_0^{\pi/2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

Alltså är

$$
\begin{aligned}
f(x) &\sim \frac{1}{\pi} + \frac{1}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{2m+1}\Big(\cos(4m+1)x - \cos(4m+3)x\Big) - \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2nx}{4n^2-1} \\
&= \frac{1}{\pi} + \frac{1}{\pi}\cos x - \frac{2}{3\pi}\cos 2x - \frac{1}{\pi}\cos 3x - \frac{2}{15\pi}\cos 4x + \frac{1}{3\pi}\cos 5x - \dots
\end{aligned}
$$

4. (a) Med upprep. integration har vi att:

$$-u''(x) = 2 \Longrightarrow u''(x) = -2 \Longrightarrow u'(x) = -2x + A \Longrightarrow u(x) = -x^2 + Ax + B,$$

där konstanterna A och B bestäms ur randdata:

$$\begin{cases} u'(0) & = -0 + A = 1 \Longrightarrow A = 1 \\ u'(1) & = -2 + A = 1 \Longrightarrow A = 3. \end{cases} \tag{6}$$

Dvs, (1) saknar lösning.

(b)-(c) Vi använder variationsformulering:

$$\int_0^1 -u''v\,dx = \int_0^1 2 \cdot v\,dx. \tag{7}$$

Partiell integration ger

$$\begin{aligned} VL = [PI] &= \Big[-u'v\Big]_0^1 - \int_0^1 -u'v\,dx - u'(1)v(1) + u'(0)v(0) + \int_0^1 u'v'\,dx \\ &= -v(1) + v(0) + \int_0^1 u'v'\,dx = 2\int_0^1 v\,dx = HL. \end{aligned} \tag{8}$$

Variationsformuleringen blir då: sök $u \in V := \{v : ||v|| + ||v'|| < \infty\}$ så att

$$\int_0^1 u'v'\,dx = 2\int_0^1 v\,dx - v(0) + v(1), \qquad \text{för alla } v \in V \tag{9}$$

Här introduceras rummet

$$V_h = \{\text{alla kontinuerliga styckvis linjära funktioner på } T_h\}$$

med bas funktionerna:

$$\varphi_0(x) = \begin{cases} -2x+1, & 0 \le x \le 1/2, \\ 0, & 1/2 \le x \le 1, \end{cases} \qquad \varphi_1(x) = \begin{cases} 2x, & 0 \le x \le 1/2, \\ -2x+2, & 1/2 \le x \le 1, \end{cases}$$

och

$$\varphi_2(x) = \begin{cases} 0, & 0 \le x \le 1/2, \\ 2x-1, & 1/2 \le x \le 1. \end{cases}$$

Finitelementmetoden (FEM): sök $U \in V_h$ så att

$$\int_0^1 U'v'\,dx = 2\int_0^1 v\,dx - v(0) + v(1), \qquad \text{för alla } v \in V_h. \tag{10}$$

Ansätt $U = \xi_0\varphi_0 + \xi_1\varphi_1 + \xi_2\varphi_2$ då är $U' = \xi_0\varphi_0' + \xi_1\varphi_1' + \xi_2\varphi_2'$. Insättning i (FEM) (10) med $v = \varphi_i,\ i = 0, 1, 2$ ger

$$\begin{aligned} &\int_0^1 (\xi_0\varphi_0' + \xi_1\varphi_1' + \xi_2\varphi_2')\varphi_0'\,dx = 2\int_0^1 \varphi_0\,dx - \varphi_0(0) + \varphi_0(1) \\ &\int_0^1 (\xi_0\varphi_0' + \xi_1\varphi_1' + \xi_2\varphi_2')\varphi_1'\,dx = 2\int_0^1 \varphi_1\,dx - \varphi_1(0) + \varphi_1(1) \\ &\int_0^1 (\xi_0\varphi_0' + \xi_1\varphi_1' + \xi_2\varphi_2')\varphi_2'\,dx = 2\int_0^1 \varphi_2\,dx - \varphi_2(0) + \varphi_2(1) \end{aligned} \tag{11}$$

Styvhetsmatrisen blir (räkna själv!)

$$A = \frac{1}{h}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Det leder till ett linjärt ekvationssystem $A\xi = b$ för den okända vektorn $\xi = (\xi_0, xi_1, \xi_2)$ med högerled:

$$b = \begin{pmatrix} 2\int_0^1 \varphi_0\,dx - \varphi_0(0) + \varphi_0(1) = 1/2 - 1 + 0 \\ 2\int_0^1 \varphi_1\,dx - \varphi_1(0) + \varphi_1(1) = 1 - 0 + 0 \\ 2\int_0^1 \varphi_2\,dx - \varphi_2(0) + \varphi_2(1) = 1/2 - 0 + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1 \\ 3/2 \end{pmatrix}.$$

Observera att A är inte inverterbar. Eftersom det inte finns några exakta lösningar kan man inte heller förvänta sig att det approximativa metoden kan ge några lösningar. Alltså problemet är illa ställd från början.

5. Låt $u(x,t) = X(x)T(t) \neq 0$. PDEn kan nu skrivas som $T'(t)X(x) = c^2 T(t)X''(x)$, vilket ger

$$\frac{T'(t)}{c^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = \lambda. \quad \text{eller} \quad \begin{cases} T'(t) - c^2\lambda T(t) &= 0 \\ X''(x) - \lambda X(x) &= 0 \end{cases} \tag{12}$$

Med Dirichlet randdata har vi att $\lambda < 0$ och karakteristiska ekvationen för X är $r^2 = \lambda$, med rötterna $r = \pm i\sqrt{-\lambda}$. Alltså kan vi skriva

$$T(t) = Ae^{c^2\lambda t}, \qquad X(x) = C\cos\sqrt{-\lambda}\,x + D\sin\sqrt{-\lambda}\,x. \tag{13}$$

Därmed alla funktioner

$$u(x,t) = e^{c^2\lambda t}[C\cos\sqrt{-\lambda}\,x + D\sin\sqrt{-\lambda}\,x],$$

med C och D konstanter ($\lambda < 0$ godtycklig) satisfierar differentialekvationen. Randvillkoren ger

$$u(0,t) = Ce^{c^2\lambda t} = 0 \Longrightarrow C = 0, \qquad u(1,t) = De^{c^2\lambda t}\sin\sqrt{-\lambda} = 0.$$

Med $D \neq 0$ (annars får vi endast den triviala lösningen) har vi att $\sin\sqrt{-\lambda} = 0$, vilket ger $\sqrt{-\lambda} = n\pi$, $n = 1, 2, \ldots$, och vi har egenvärden och egenfunktionerna

$$\lambda = -n^2\pi^2, \quad X_n(x) = \sin n\pi x, \qquad n = 1, 2, \ldots. \tag{14}$$

dvs att vi har en "lösningsprofil" som

$$u_n(x,t) = D_n e^{-(n\pi c)^2 t}\sin(n\pi x). \tag{15}$$

Med superposition kan vi skriva lösningen som

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} D_n e^{-(n\pi c)^2 t}\sin(n\pi x). \tag{16}$$

För att bestämma D_n använder vi begynnelsevillkoret

$$u(x,0) = \sin(\pi x) + \frac{1}{2}\sin(3\pi x). \tag{17}$$

För enkelhetsskull skriver vi

$$u(x,0) = f(x), \tag{18}$$

och använder (16) för att få

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} D_n \sin(n\pi x). \tag{19}$$

Identifiering av högerleden i (17) och (18) (enligt (19)) ger

$$D_1\sin(\pi x) + D_2\sin(2\pi x) + D_3\sin(3\pi x) + \ldots = \sin(\pi x) + \frac{1}{2}\sin(3\pi x). \tag{20}$$

Med identifiering av koefficienter i (20) får vi att $D_1 = 1,\ D_2 = 0,\ D_3 = 1/2,\ D_4 = D_5 = \ldots = 0$, och slutligen, enligt (16), är lösningen

$$u(x,t) = e^{-(\pi c)^2 t}\sin(\pi x) + \frac{1}{2}e^{-(3\pi c)^2 t}\sin(3\pi x).$$

6. Se Lecture Notes.

MA