Matematik Chalmers

**Tentamen i TMA683/TMA682 Tillämpad matematik K2/Bt2, 2017–04–10, kl 8:30-12:30**

Telefon: Maximilian Thaller, 031-772 5325
Hjälpmedel: Endast tabell på baksidan av tesen. Kalkylator ej tillåten.
Betygsgränser, **3**: 12-17p, **4**: 18-23p och **5**: 24-30p
Lösningar/Granskning: Se kurshemsidan.

---

**1.** Använd Laplacetransformen för att lösa differentialekvationen (5p)

$$\begin{cases} y'(t) - y(t) = \sin 2t, & t > 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

**2.** Låt $f(x) = x$ och $g(x) = 1 - x^2$, där $x \in [0, 1]$.

a) Visa genom att beräkna normer och skalärprodukter att Cauchy-Schwarz olikhet är uppfylld för $\langle f, g \rangle$. (2p)

b) Hitta en funktion $h \in P^1(0, 1)$ som är ortogonal mot $f$. (2p)

**3.** a) Bestäm Fourierserien till den 2-periodiska funktionen $f(x) = 1 - x^2,\ x \in [-1, 1)$. (4p)

b) Använd resultatet i a) för att beräkna summan (2p)

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

**4.** Härled variationsformulering och finita element-formulering, samt beräkna styvhets- och konvektionsmatris och högerledsvektor för den styckvis linjära finita element-approximationen till randvärdesproblemet (5p)

$$\begin{cases} -4u''(x) + u'(x) = 1, & x \in (0, 1), \\ u(0) = u'(1) = 0, \end{cases}$$

på en likformig partition $\mathcal{T}_h$ av intervallet $[0, 1]$ med steglängd $h = 1/3$. Formulera det resulterande linjära ekvationssystemet (lösningen behöver ej beräknas).

**5.** Betrakta vågekvationen (5p)

$$\begin{cases} \ddot{u} = u'', & x \in (0, 1), \quad t > 0, \\ u(0, t) = u(1, t) = 0, & t \geq 0, \\ u(x, 0) = x - x^2, & x \in (0, 1) \\ \dot{u}(x, 0) = 0, & x \in (0, 1). \end{cases}$$

Använd variabelseparationsmetoden för att bestämma lösningen $u(x, t)$.

**6.** Betrakta värmeledningsekvationen

$$\begin{cases} \dot{u} - u'' = 0, & x \in (0, 1), \quad t > 0, \\ u(0, t) = u(1, t) = 0, & t \geq 0, \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in (0, 1) \end{cases}$$

Visa att

a) $\dfrac{d}{dt}\|u\|^2 + 2\|u'\|^2 = 0$ (2p)

b) $\|u(\cdot, t)\| \leq e^{-t}\|u_0\|$ (3p)

LYCKA TILL! /TG

**Tabell med Laplacetransformer och trigonometriska formler**

| | |
|---|---|
| $f(t)$ | $F(s)$ |
| $af(t)+bg(t)$ | $aF(s)+bG(s)$ |
| $tf(t)$ | $-F'(s)$ |
| $t^n f(t)$ | $(-1)^n F^{(n)}(s)$ |
| $e^{-at}f(t)$ | $F(s+a)$ |
| $f(t-T)\theta(t-T)$ | $e^{-Ts}F(s)$ |
| $f'(t)$ | $sF(s)-f(0)$ |
| $f''(t)$ | $s^2F(s)-sf(0)-f'(0)$ |
| $f^{(n)}(t)$ | $s^nF(s)-\sum_{k=1}^{n} s^{n-k}f^{(k-1)}(0)$ |
| $\int_0^t f(\tau)\,d\tau$ | $\frac{F(s)}{s}$ |
| $\theta(t)$ | $\frac{1}{s}$ |
| $\frac{t^n}{n!}$ | $\frac{1}{s^{n+1}}$ |
| $e^{-at}$ | $\frac{1}{s+a}$ |
| $\cosh at$ | $\frac{s}{s^2-a^2}$ |
| $\sinh at$ | $\frac{a}{s^2-a^2}$ |
| $\cos bt$ | $\frac{s}{s^2+b^2}$ |
| $\sin bt$ | $\frac{b}{s^2+b^2}$ |
| $\frac{t}{2b}\sin bt$ | $\frac{s}{(s^2+b^2)^2}$ |
| $\frac{1}{2b^3}(\sin bt - bt\cos bt)$ | $\frac{1}{(s^2+b^2)^2}$ |

| |
|---|
| $2\sin a\sin b=\cos(a-b)-\cos(a+b)$ |
| $2\sin a\cos b=\sin(a-b)+\sin(a+b)$ |
| $2\cos a\cos b=\cos(a-b)+\cos(a+b)$ |

**TMA683/TMA682 Tillämpad matematik K2/Bt2, 2017–04–10, kl 8:30-12:30.**
**Lösningar.**

---

**1.** Laplacetransformering med $y(0) = 1$ ger, eftersom $\mathcal{L}[\sin 2t] = \frac{2}{s^2+4}$,

$$sY(s) - y(0) - Y(s) = \frac{2}{s^2+4} \Longrightarrow$$
$$(s-1)Y(s) = 1 + \frac{2}{s^2+4} \Longrightarrow Y(s) = \frac{1}{s-1} + \frac{2}{(s-1)(s^2+4)}$$

Partialbråksuppdelning ger

$$\frac{2}{(s-1)(s^2+4)} = \frac{A}{s-1} + \frac{Bs+C}{s^2+4}$$

där vi kan multiplicera ihop och få ekvationssystemet

$$\begin{cases} A + B = & 0 \\ -B + C = & 0 \\ 4A - C = & 2 \end{cases}$$

med lösningen $A = 2/5$, $B = -2/5$, $C = -2/5$. Alltså

$$Y(s) = \left(1 + \frac{2}{5}\right)\frac{1}{s-1} - \frac{2}{5}\frac{s}{s^2+4} - \frac{1}{5}\frac{2}{s^2+4}$$
$$\Longrightarrow y(t) = \frac{7}{5}e^t - \frac{2}{5}\cos 2t - \frac{1}{5}\sin 2t,\ t \geq 0$$

där vi använt att $\mathcal{L}[e^{at}] = \frac{1}{s-a}$, $\mathcal{L}[\cos at] = \frac{s}{s^2+a^2}$, $\mathcal{L}[\sin at] = \frac{a}{s^2+a^2}$.

**2.**

a) Vi beräknar $\langle f, g\rangle = \int_0^1 x(1-x^2)dx = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\right]_0^1 = \frac{1}{4}$, samt $\|f\|_{L_2(0,1)} = \left(\int_0^1 |x|^2 dx\right)^{1/2} = \left(\frac{1}{3}\right)^{1/2}$ och $\|g\|_{L_2(0,1)} = \left(\int_0^1 |1-x^2|^2 dx\right)^{1/2} = \left(\int_0^1 (1-2x^2+x^4)dx\right)^{1/2} = \left(\left[x - \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5\right]_0^1\right)^{1/2} = \left(\frac{8}{15}\right)^{1/2}$.
Vi vill visa att $\langle f, g\rangle \leq \|f\|\|g\|$, dvs att

$$\frac{1}{4} \leq \sqrt{\frac{1}{3}\cdot\frac{8}{15}}.$$

Men detta är sant, ty om vi kvadrerar båda sidor får vi

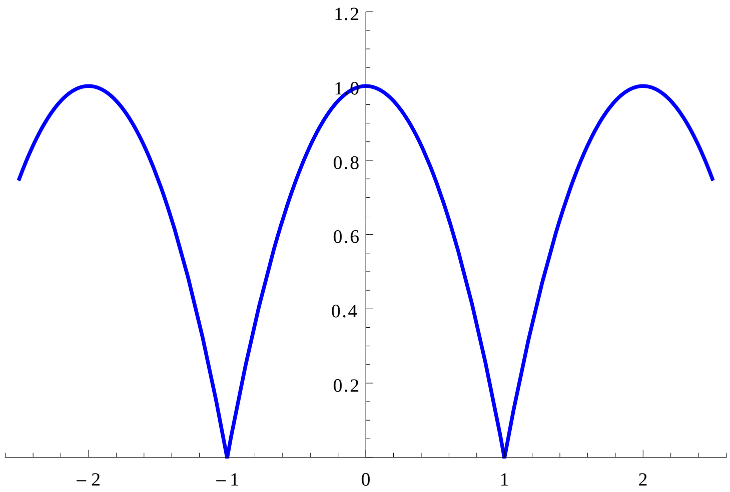
$$\frac{1}{16} \leq \frac{8}{45} \Longleftrightarrow 45 \leq 16 \cdot 8 = 128$$

vilket är uppenbart sant.

b) Att $h$ är ortogonal mot $f$ betyder att $\langle h, f\rangle = 0$. Vi ansätter $h(x) = ax + b \in P^1(0,1)$ och skall bestämma $a$ och $b$. Vi har

$$0 = \langle h, f\rangle = \int_0^1 (ax+b)x dx = \left[a\frac{x^3}{3} + b\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{a}{3} + \frac{b}{2}.$$

Vi kan alltså välja t.ex. $a = 3$ och $b = -2$ (flera val är möjliga).




FIGUR 1. Den 2-periodiska funktionen $f(x) = 1 - x^2,\ x \in [-1, 1]$.

**3.** a) Vi ser att funktionen $f(x)$ är jämn. Alltså är $b_n = 0,\ n = 1, 2, \ldots$, och

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \qquad \text{med} \qquad a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\, dx,\ n = 0, 1, \ldots$$

där $2L = 2$, dvs $L = 1$. Alltså är

$$a_0 = 2\int_0^1 (1 - x^2)dx = 2\left[x - \frac{x^3}{3}\right]_{x=0}^1 = \frac{4}{3}$$

och, för $n = 1, 2, \ldots$,

$$\begin{aligned} a_n &= 2\int_0^1 (1 - x^2)\cos(n\pi x)\ dx = \{\text{P.I.}\} = 2\left[(1 - x^2)\frac{1}{n\pi}\sin(n\pi x)\right]_0^1 + \frac{4}{n\pi}\int_0^1 x\sin(n\pi x)\ dx \\ &= \frac{4}{n^2\pi^2}\left[-x\cos(n\pi x)\right]_0^1 + \frac{4}{n^2\pi^2}\int_0^1 \cos(n\pi x)\ dx \\ &= -\frac{4\cos n\pi}{n^2\pi^2} + \frac{4}{n^3\pi^3}\left[\sin(n\pi x)\right]_{x=0}^1 = -\frac{4(-1)^n}{n^2\pi^2} \end{aligned}$$

Därför är

$$f(x) = \frac{2}{3} - \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}\cos(n\pi x).$$

b) Om vi sätter $x = 1$ i Fourierserien ovan, får vi

$$0 = f(1) = \frac{2}{3} - \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}\cos(n\pi) = \frac{2}{3} - \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{2}{3} - \frac{4}{\pi^2}S,$$

där $S$ är den sökta summan. Vi löser ut $S$ och får $S = \frac{\pi^2}{6}$.

**4.** Multiplicera ekvationen med en testfunktion $v \in V$, där

$$V = \{v : ||v||_{L_2(0,1)} + ||v'||_{L_2(0,1)} < \infty,\ v(0) = 0\}$$

och integrera över $[0, 1]$. Genom partialintegration och med hänsyn till randdata får vi följande *variationsproblem*: Finn $u \in V$ så att

$$\int_0^1 (4u'v' + u'v)dx = \int_0^1 v dx, \quad \forall v \in V. \tag{1}$$

En motsvarade *Finita Element Metod* med $cG(1)$ formuleras som: Hitta $U \in V_h$ så att

$$\int_0^1 (4U'v' + U'v)dx = \int_0^1 v dx, \quad \forall v \in V_h \subset V \tag{2}$$

där

$V_h = \big\{ v : v \text{ är styckvis linjär och kontinuerlig i en partition av } [0,1] \text{ med steglängd } h,\ v(0)=0 \big\}.$

Vi ansätter $U(x) = \xi_1\varphi_1(x) + \xi_2\varphi_2(x) + \xi_3\varphi_3(x)$ där

$$\varphi_j(x) = \begin{cases} \frac{1}{h}(x - x_{j-1}), & x \in [x_{j-1}, x_j) \\ \frac{1}{h}(x_j - x), & x \in [x_j, x_{j+1})\ , \\ 0, & \text{annars} \end{cases} \qquad j = 1,2,3$$

är hattfunktionerna svarande mot nodpunkterna $x_j = j/3,\ j = 1,2,3$. Notera att $\varphi_3$ är en "halv hatt".

Vi sätter in $U(x) = \xi_1\varphi_1(x) + \xi_2\varphi_2(x) + \xi_3\varphi_3(x)$ i (2) och väljer testfunktioner $\varphi = \varphi_i,\ i = 1,2,3$. Vi får då ekvationssystemet

$$(4A + C)\,\xi = b,$$

där $A$ är styvhetsmatrisen med element $A_{ij} = \int_0^1 \varphi_i'\varphi_j' dx,\ i,j = 1,2,3$, och $C$ är konvektionsmatrisen med element $C_{ij} = \int_0^1 \varphi_i\varphi_j' dx,\ i,j = 1,2,3$. $b$ är högerledsvektorn med element $b_i = \int_0^1 \varphi_i dx$, $i = 1,2,3$ och $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)^T$ är lösningsvektorn.

Beräkning av matriselementen ger $A_{ii} = 2/h,\ A_{i,i\pm1} = -1/h,\ i = 1,2$ och $A_{33} = 1/h$ (halv hatt), samt $C_{ii} = 0,\ C_{i,i\pm1} = \pm 1/2,\ i = 1,2$ och $C_{33} = 1/2$ och resten nollor. För högerledsvektorn får vi $b_i = h,\ i = 1,2$ och $b_3 = h/2$.

$$\left( \frac{4}{h}\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{bmatrix} = h \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1/2 \end{bmatrix},$$

eller, med $h = 1/3$,

$$\begin{bmatrix} 24 & -23/2 & 0 \\ -25/2 & 24 & -23/2 \\ 0 & -25/2 & 25/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/3 \\ 1/3 \\ 1/6 \end{bmatrix}$$

(Lösningen är $\xi \approx (0.0625, 0.1014, 0.1148)^T$.)

**5.** För att bestämma $u(x,t)$, sätt $u(x,t) = X(x)T(t)$. Insättning i differentialekvationen ger $X''T = XT''$ eller $\frac{X''}{X} = \frac{T''}{T} = \lambda = \text{const}$. Vi har sett att med homogena randvillkor är $\lambda < 0$ (även för vågekvationen). Sätt $\lambda = -\mu^2$. Detta ger

$$\begin{cases} X'' + \mu^2 X = 0, \\ X(0) = X(1) = 0. \end{cases} \qquad T'' = -\mu^2 T.$$

Lösningen för $X(x)$ är då

$$X(x) = A\cos\mu x + B\sin\mu x.$$

$X(0) = 0 \Longrightarrow A = 0$ och $X(1) = 0 \Longrightarrow B\sin\mu = 0 \quad \Longrightarrow \mu = n\pi$ (ty $B = 0$ ger trivial lösning). Vi har alltså

$$\mu_n = n\pi, \qquad X_n(x) = B_n \sin n\pi x, \qquad n = 1,2,\ldots.$$

För $T$ gäller då

$$T_n'' = -\mu_n^2 T_n \Longrightarrow T_n(t) = C_n \sin(n\pi t) + D_n \cos(n\pi t)\,, \quad n = 1,2,\ldots.$$

Superposition ger den allmänna lösningen

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(C_n \sin(n\pi t) + D_n \cos(n\pi t)\right)\sin(n\pi x)\,,$$

där vi bakat ihop $B_n$ med övriga konstanter. Då $\dot{u}(x,0) = 0$ måste vi ha $C_n = 0,\ n = 1,2,\ldots$. Alltså gäller

$$u(x,0) = x - x^2 = \sum_{n=1}^{\infty} D_n \sin(n\pi x)\,,$$

och vi ser att $D_n$ är Fourier-sinus koefficienter för funktionen $x - x^2$ på intervallet $(0,1)$:

$$
\begin{aligned}
D_n &= 2\int_0^1 (x-x^2)\sin n\pi x\,dx = -\frac{2}{n\pi}\left[(x-x^2)\cos n\pi x\right]_{x=0}^1 - \frac{2}{n\pi}\int_0^1 2x\cos n\pi x\,dx \\
&= -\frac{2}{n^2\pi^2}\left[2x\sin n\pi x\right]_{x=0}^1 + \frac{2}{n^2\pi^2}\int_0^1 2\sin n\pi x\,dx = -\frac{4}{n^3\pi^3}\left[\cos n\pi x\right]_{x=0}^1 = 4\frac{1-(-1)^n}{n^3\pi^3}
\end{aligned}
$$

Alltså är lösningen

$$
u(x,t) = 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^n}{n^3\pi^3}\cos(n\pi t)\sin(n\pi x) = \sum_{m=1}^{\infty}\frac{8}{(2m-1)^3\pi^3}\cos((2m-1)\pi t)\sin((2m-1)\pi x)
$$

**6.** Se FEM-boken, sats 2.2.

`/TG`