Matematik Chalmers

**Tentamen i TMA683/TMA682 Tillämpad matematik K2/Bt2, 2017–01–14, kl 14:00-18:00**

Telefon: Tobias Gebäck, 031-772 3547
Hjälpmedel: Endast tabell på baksidan av tesen. Kalkylator ej tillåten.
Varje uppgift ger max 5 poäng. Betygsgränser, **3**: 12-17p, **4**: 18-23p och **5**: 24-30p
Lösningar/Granskning: Se kurshemsidan.

---

**1.** Använd Laplacetransformer för att lösa differentialekvationen

$$\begin{cases} y''(t) + 3y'(t) = e^{-3t}, & t > 0 \\ y(0) = 1,\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

**2.** Låt $f(x) = 3 - x^2$, då $x \in [0, 1]$.

a) Bestäm den linjära interpolanten $\pi_1 f \in \mathcal{P}^{(1)}(0, 1)$, som interpolerar $f$ i ändpunkterna $x = 0$ och $x = 1$.
b) Bestäm $L_2$-projektionen $Pf \in \mathcal{P}^{(1)}(0, 1)$ av funktionen $f$.
c) Visa att $\|Pf - f\|_{L_2(0,1)} \leq \|\pi_1 f - f\|_{L_2(0,1)}$ för den givna funktionen $f$.

**3.** a) Bestäm Fourierserien till den 1-periodiska funktionen $f(x) = \sin(\pi x),\ x \in [0, 1)$.
b) Använd resultatet i a) till att beräkna Fourierserien till den 1-periodiska funktionen $g(x) = \cos(\pi x),\ x \in [0, 1)$.

**4.** Låt $b$ vara en positiv konstant och $f \in L_2(0, 1)$ en given funktion. Härled en *a priori* feluppskattning för den styckvis linjära finita element-approximationen på en likformig partition med steglängd $h$ för konvektion-diffusions-problemet

$$\begin{cases} -u''(x) + b\,u'(x) = f(x), & x \in (0, 1), \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases}$$

Använd energinormen $||w||_E := ||w'||_{L_2(0,1)}$.

**5.** Betrakta det inhomogena värmeledningsproblemet

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} - 3x, & x \in (0, 1), \quad t > 0, \\ u(0, t) = 1, \quad u(1, t) = 0, & t \geq 0, \\ u(x, 0) = \frac{1}{2}x^3, & x \in (0, 1). \end{cases}$$

a) Sätt $u(x, t) = v(x, t) + S(x)$ och bestäm $S(x)$ så att $v(x, t)$ satisfierar det homogena problemet

$$\begin{cases} v_t - v_{xx} = 0, & x \in (0, 1), \quad t > 0, \\ v(0, t) = v(1, t) = 0, & t \geq 0, \\ v(x, 0) = \frac{1}{2}x^3 - S(x), & x \in (0, 1) \end{cases}$$

b) Använd variabelseparationsmetoden för att bestämma $v(x, t)$ och därefter $u(x, t)$.

**6.** Formulera och bevisa *Poincarés olikhet* på ett intervall $[0, L]$.

LYCKA TILL!
/TG

**Tabell med Laplacetransformer och trigonometriska formler**

| | |
|---|---|
| $f(t)$ | $F(s)$ |
| $af(t)+bg(t)$ | $aF(s)+bG(s)$ |
| $tf(t)$ | $-F'(s)$ |
| $t^n f(t)$ | $(-1)^n F^{(n)}(s)$ |
| $e^{-at}f(t)$ | $F(s+a)$ |
| $f(t-T)\theta(t-T)$ | $e^{-Ts}F(s)$ |
| $f'(t)$ | $sF(s)-f(0)$ |
| $f''(t)$ | $s^2F(s)-sf(0)-f'(0)$ |
| $f^{(n)}(t)$ | $s^nF(s)-\sum_{k=1}^{n} s^{n-k}f^{(k-1)}(0)$ |
| $\int_0^t f(\tau)\,d\tau$ | $\frac{F(s)}{s}$ |
| $\theta(t)$ | $\frac{1}{s}$ |
| $\frac{t^n}{n!}$ | $\frac{1}{s^{n+1}}$ |
| $e^{-at}$ | $\frac{1}{s+a}$ |
| $\cosh at$ | $\frac{s}{s^2-a^2}$ |
| $\sinh at$ | $\frac{a}{s^2-a^2}$ |
| $\cos bt$ | $\frac{s}{s^2+b^2}$ |
| $\sin bt$ | $\frac{b}{s^2+b^2}$ |
| $\frac{t}{2b}\sin bt$ | $\frac{s}{(s^2+b^2)^2}$ |
| $\frac{1}{2b^3}(\sin bt - bt\cos bt)$ | $\frac{1}{(s^2+b^2)^2}$ |

| |
|---|
| $2\sin a\sin b=\cos(a-b)-\cos(a+b)$ |
| $2\sin a\cos b=\sin(a-b)+\sin(a+b)$ |
| $2\cos a\cos b=\cos(a-b)+\cos(a+b)$ |

**TMA683/TMA682 Tillämpad matematik K2/Bt2, 2017–01–14, kl 14:00-18:00.**
**Lösningar.**

---

**1.** Laplacetransformering med $y(0) = 1$ och $y'(0) = 0$ ger, eftersom $\mathcal{L}[e^{-3t}] = \frac{1}{s+3}$,

$$s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) + 3sY(s) - 3y(0) = \frac{1}{s+3} \Longrightarrow$$

$$(s^2 + 3s)Y(s) = s + 3 + \frac{1}{s+3} \Longrightarrow Y(s) = \frac{s+3}{s^2+3s} + \frac{1}{(s^2+3s)(s+3)} = \frac{1}{s} + \frac{1}{s(s+3)^2}$$

Partialbråksuppdelning ger

$$\frac{1}{s(s+3)^2} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+3} + \frac{C}{(s+3)^2}$$

där vi kan bestämma $A = 1/9$, $B = -1/9$, $C = -1/3$. Alltså

$$Y(s) = \left(1 + \frac{1}{9}\right)\frac{1}{s} - \frac{1}{9}\frac{1}{s+3} - \frac{1}{3}\frac{1}{(s+3)^2} \Longrightarrow$$

$$y(t) = \frac{10}{9}\theta(t) - \frac{1}{9}(1+3t)e^{-3t} = \frac{1}{9}\left(10 - (1+3t)e^{-3t}\right),\ t \geq 0$$

där vi använt att $\mathcal{L}[\theta(t)] = \frac{1}{s}$, $\mathcal{L}[e^{-3t}] = \frac{1}{s+3}$, $\mathcal{L}[te^{-3t}] = \frac{1}{(s+3)^2}$.

**2.**

a) Den linjära interpolanten $\pi_1 f$ på $[0, 1]$ ges av

$$\pi_1 f(x) = f(0)\phi_0(x) + f(1)\phi_1(x) = f(0)(1-x) + f(1)x = 3(1-x) + 2x = 3 - x$$

b) $L_2$-projektionen $Pf$ av $f$ på $\mathcal{P}^{(1)}(0, 1)$ uppfyller $(Pf - f) \perp v, \forall v \in \mathcal{P}^{(1)}(0, 1)$. Då $\{1, x\}$ är en bas för $\mathcal{P}^{(1)}(0, 1)$, gäller att $\langle Pf - f, v\rangle = 0$ för $v(x) = 1$ och $v(x) = x$. Ansätt $Pf(x) = ax + b$ och beräkna

$$0 = \langle Pf - f, 1\rangle = \int_0^1 (ax + b - 3 + x^2)\,dx = \left[a\frac{x^2}{2} + bx - 3x + \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{a}{2} + b - 3 + \frac{1}{3}$$

$$\Longrightarrow \frac{1}{2}a + b = \frac{8}{3}$$

$$0 = \langle Pf - f, x\rangle = \int_0^1 (ax + b - 3 + x^2)\,x\,dx = \left[a\frac{x^3}{3} + (b-3)\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4}\right]_0^1 = \frac{a}{3} + \frac{1}{2}(b-3) + \frac{1}{4}$$

$$\Longrightarrow \frac{1}{3}a + \frac{1}{2}b = \frac{5}{4}$$

Lösningen är $a = -1$, $b = \frac{19}{6}$, dvs $Pf(x) = \frac{19}{6} - x$.

c) Enligt sats i boken är $\|Pf - f\|_{L_2(0,1)} \leq \|\varphi - f\|_{L_2(0,1)}$, $\forall \varphi \in \mathcal{P}^{(1)}(0, 1)$. Detta gäller även i vårt fall med $\varphi = \pi_1 f$.

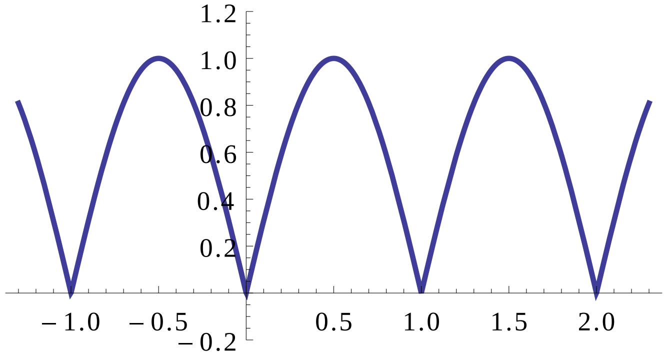
Alternativt kan man beräkna

$$\|\pi_1 f - f\|^2 = \int_0^1 \left(3 - x - (3 - x^2)\right)^2 dx = \int_0^1 (x^2 - x)^2 dx = \ldots = \frac{1}{30}$$

samt

$$\|Pf - f\|^2 = \int_0^1 \left(\frac{19}{6} - x - (3 - x^2)\right) dx = \int_0^1 \left(x^2 - x + \frac{1}{6}\right)^2 dx = \ldots = \frac{1}{90}$$

och alltså $\|Pf - f\| \leq \|\pi_1 f - f\|$.




FIGUR 1. Den 1-periodiska funktionen $f(x) = \sin \pi x,\ x \in [0, 1]$.

**3.** a) Vi ser att funktionen $f(x)$ är jämn. Alltså är $b_n = 0,\ n = 1, 2, \ldots$, och

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \qquad \text{med} \qquad a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\,dx,\ n = 0, 1, \ldots$$

där $2L = 1$, dvs $L = 1/2$. Alltså är

$$a_0 = \frac{2}{1/2}\int_0^{1/2} \sin(\pi x)dx = 4\left[-\frac{1}{\pi}\cos\pi x\right]_{x=0}^{1/2} = \frac{4}{\pi}$$

och, för $n = 1, 2, \ldots$,

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{2}{1/2}\int_0^{1/2} \sin(\pi x)\cos\left(\frac{n\pi}{1/2}x\right)\,dx = 4\int_0^{1/2}\sin(\pi x)\cos(2n\pi x)\,dx \\
&= 2\int_0^{1/2}\big(\sin((1-2n)\pi x) + \sin((1+2n)\pi x)\big)\,dx \\
&= 2\Big[-\frac{\cos((1-2n)\pi x)}{(1-2n)\pi}\Big]_{x=0}^{x=1/2} + 2\Big[-\frac{\cos((1+2n)\pi x)}{(1+2n)\pi}\Big]_{x=0}^{x=1/2} \\
&= \frac{2}{\pi}\left(\frac{1-\cos\left((1-2n)\frac{\pi}{2}\right)}{1-2n} + \frac{1-\cos\left((1+2n)\frac{\pi}{2}\right)}{1+2n}\right) \\
&= \frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{1-2n} + \frac{1}{1+2n}\right) = \frac{4}{\pi}\frac{1}{(1-2n)(1+2n)} = \frac{4}{\pi}\frac{1}{1-4n^2}
\end{aligned}$$

Därför är

$$f(x) = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1}\cos(2n\pi x).$$

b) Vi har visat i kursen att det är tillåtet att derivera Fourierserier termvis om båda serierna är konvergenta. Alltså gäller att

$$f'(x) = \pi\cos(\pi x) = \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n\pi}{4n^2-1}\sin(2n\pi x) = 8\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{4n^2-1}\sin(2n\pi x)$$

och för den 1-periodiska funktionen $g(x) = \cos\pi x,\ x \in [0, 1)$ gäller

$$g(x) = \frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{4n^2-1}\sin(2n\pi x)$$

**4.** Multiplicera ekvationen med en testfunktion $v \in H_0^1 = \{v : ||v|| + ||v'|| < \infty,\ v(0) = v(1) = 0\}$ och integrera över $[0, 1]$. Genom partialintegration och med hänsyn till randdata får vi följande *variationsproblem*: Finn $u \in H_0^1(0, 1)$ så att

(1) $$\int_0^1 (u'v' + bu'v)dx = \int_0^1 fvdx, \quad \forall v \in H_0^1(0, 1).$$

En motsvarade *Finita Element Metod* med $cG(1)$ formuleras som: Finn $U \in V_h^0$ så att

$$(2) \qquad \int_0^1 (U'v' + bU'v)dx = \int_0^1 fv dx, \quad \forall v \in V_h^0 \subset H_0^1(0,1),$$

där

$$V_h^0 = \big\{v : v \text{ är styckvis linjär och kontinuerlig i en partition av } [0,1] \text{ med steglängd } h, \quad v(0) = v(1) = 0\big\}.$$

Låt nu $e = u - U$. Då ger (1)-(2) att

$$(3) \qquad \int_0^1 (e'v' + be'v) = 0, \quad \forall v \in V_h^0, \qquad \text{(Galerkin-ortogonalitet).}$$

Observera att eftersom $e(0) = e(1) = 0$, får vi också

$$(4) \qquad \int_0^1 e'e\, dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{d}{dx}(e(x)^2)dx = \left[\frac{1}{2}e(x)^2\right]_0^1 \equiv 0.$$

*A priori feluppskattning:* Genom att använda (3) och (4) får vi

$$\begin{aligned}
\|e\|_E^2 = \|e'\|_{L_2(0,1)}^2 &= \int_0^1 e'e'\,dx = \int_0^1 (e'e' + be'e)dx = \int_0^1 \Big(e'(u-U)' + be'(u-U)\Big)dx \\
&= \{\pm\pi_h u \in V_h^0\} = \int_0^1 \Big(e'(u - \pi_h u + \pi_h u - U)' + be'(u - \pi_h u + \pi_h u - U)\Big)\,dx \\
&= \int_0^1 \Big(e'(u-\pi_h u)' + be'(u-\pi_h u)\Big)\,dx + \int_0^1 \Big(e'(\pi_h u - U)' + be'(\pi_h u - U)\Big)\,dx \\
&= \{\text{Eftersom } \ (\pi_h u - U) \in V_h^0,\ (3) \Longrightarrow\} = \int_0^1 \Big(e'(u-\pi_h u)' + be'(u-\pi_h u)\Big)\,dx \\
&\le \{\text{Cauchy-Schwarz}\} \le \|(u-\pi_h u)'\|\|e'\| + b\|u-\pi_h u\|\|e'\| \\
&\le \{\text{feluppskattningar för } \pi_h u\} \le C\left(h\|u''\| + bh^2\|u''\|\right)\|e'\|.
\end{aligned}$$

Detta ger med $\|e\|_E = \|e'\|$ att

$$\|e\|_E \le C(h + bh^2)\|u''\|,$$

vilket är den sökta feluppskattningen.

**5.** a) Ansätt $u(x,t) = v(x,t) + S(x)$ och sätt in i ekvationen och randvillkoren:

$$\begin{cases} v_t = v_{xx} + S''(x) - 3x, & x \in (0,1), \quad t > 0, \\ v(0,t) + S(0) = 1, \quad v(1,t) + S(1) = 0, & t \ge 0, \\ v(x,0) + S(x) = \frac{1}{2}x^3, & x \in (0,1). \end{cases}$$

Vi ser att om $S(x)$ uppfyller

$$\begin{cases} S''(x) = 3x, & x \in (0,1), \quad t > 0, \\ S(0) = 1, \quad S(1) = 0 \end{cases}$$

så löser $v(x,t)$ det givna problemet. Integration två gånger och insättning av randvillkoren ger att $S(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{2}x + 1$.

b) $v(x,t)$ skall satisfiera det givna homogena värmeledningsproblemet, med $v(x,0) = \frac{1}{2}x^3 - S(x) = \frac{3}{2}x - 1$.

För att bestämma $v(x,t)$, sätt $v(x,t) = X(x)T(t)$. Insättning i differentialekvationen för $v$ ger $X''T = XT'$ eller $\frac{X''}{X} = \frac{T'}{T} = \lambda$. Vi har sett att med homogena randvillkor är $\lambda < 0$. Sätt $\lambda = -\mu^2$. Detta ger

$$\begin{cases} X'' + \mu^2 X = 0, & T' = -\mu^2 T. \\ X(0) = X(1) = 0. \end{cases}$$

Lösningen för $X(x)$ är då

$$X(x) = A\cos\mu x + B\sin\mu x.$$

$X(0) = 0 \Longrightarrow A = 0$ och $X(1) = 0 \Longrightarrow B\sin\mu = 0 \quad \Longrightarrow \mu = n\pi$ (ty $B = 0$ ger trivial lösning). Vi har alltså

$$\mu_n = -n\pi, \qquad X_n(x) = B_n \sin n\pi x, \qquad n = 1, 2, \ldots.$$

För $T$ gäller då

$$T_n' = -\mu_n^2 T_n \Longrightarrow T_n(t) = Ce^{-(n\pi)^2 t}, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Superposition ger den allmänna lösningen

$$v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n e^{-(n\pi)^2 t} \sin n\pi x.$$

Från begynnelsedvillkoret fås att

$$v(x,0) = \frac{3}{2}x - 1 = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin n\pi x,$$

och vi ser att $B_n$ är Fourier-sinus koefficienter för funktionen $\frac{3}{2}x - 1$ på intervallet $(0,1)$:

$$B_n = 2\int_0^1 \left(\frac{3}{2}x - 1\right) \sin n\pi x\, dx = -3\left[\frac{x}{n\pi}\cos n\pi x\right]_{x=0}^1 + \frac{3}{n\pi}\int_0^1 \cos n\pi x\, dx + 2\left[\frac{1}{n\pi}\cos n\pi x\right]_{x=0}^1$$

$$= -\frac{3(-1)^n}{n\pi} + \frac{3}{(n\pi)^2}\left[\sin n\pi x\right]_{x=0}^1 + 2\frac{(-1)^n - 1}{n\pi} = -\frac{(-1)^n + 2}{n\pi}$$

Alltså är lösningen

$$v(x,t) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n + 2}{n\pi} e^{-n^2\pi^2 t} \sin n\pi x$$

och

$$u(x,t) = v(x,t) + S(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{2}x + 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n + 2}{n\pi} e^{-n^2\pi^2 t} \sin n\pi x$$

**6.** Se FEM-boken, sats 2.2.

/TG