Matematik Chalmers

Tentamen i TMA683/TMA682 Tillämpad matematik K2/Bt2,
2018–01–13, kl 14:00-18:00

Telefon: Maximilian Thaller, 031-772 5325; Examinator: Tobias Gebäck, 031-772 3547
Hjälpmedel: Endast tabell på baksidan av tesen. Kalkylator ej tillåten.
Betygsgränser, **3**: 20–29p, **4**: 30–39p och **5**: 40–50p
Lösningar/Granskning: Se kurshemsidan.

---

1. Använd Laplacetransformer för att lösa differentialekvationen (8p)

$$\begin{cases} y'(t) + 4y(t) = te^{-2t}, & t > 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

2. a) Bestäm Fourierserien till funktionen (5p)

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \in [0, \frac{1}{3}) \\ 0, & x \in [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}) \end{cases}$$

med perioden $\frac{2}{3}$.

b) Använd resultatet i a) till att beräkna summan $S = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2}$. (3p)

3. Betrakta den inhomogena vågekvationen (10p)

$$\begin{cases} \ddot{u}(x,t) - 4u''(x,t) = 1, & x \in (0,1), \quad t > 0, \\ u(0,t) = 1, \quad u(1,t) = 0, & t \geq 0, \\ u(x,0) = 1 - x^2, & x \in (0,1). \\ \dot{u}(x,0) = 0, & x \in (0,1). \end{cases}$$

Använd variabelseparationsmetoden för att bestämma $u(x,t)$.

4. Härled ett tidsstegnings-schema med Crank-Nicolson-metoden för begynnelsevärdesproblemet (5p)

$$\begin{cases} u'(t) + u(t) = t, \quad t > 0, \\ u(0) = 0, \end{cases}$$

samt beräkna den approximativa lösningens värden vid $t = 1$ och $t = 2$, då tidssteget $\Delta t = 1$.

5. a) Bestäm värdet på konstanten a så att funktionen $f(x) = x^5 - ax^3$ blir ortogonal mot alla konstanta funktioner på intervallet $[0,2]$. (3p)

b) Bestäm L_2-projektionen av $f(x)$ (med värdet på a från a)-uppgiften) på $\mathcal{P}^{(0)}(0,2)$, dvs på rummet av alla konstanta funktioner på intervallet $[0,2]$. (2p)

6. Härled *variationsformulering* och *finita element-formulering* med $cG(1)$-metoden för randvärdesproblemet (6p)

$$\begin{cases} u''(x) + 3u'(x) = e^x, \quad x \in [0,1], \\ u(0) = 0, \\ u(1) = 5, \end{cases}$$

(**OBS!** Det linjära ekvationssystemet skall *ej* härledas och inga matriselement beräknas.)

7. Antag att $f(t) = 0,\ g(t) = 0$ för $t < 0$, och att f och g är av exponentiell ordning. Visa att $\mathcal{L}[f * g] = \mathcal{L}[f]\mathcal{L}[g]$, där $f * g$ är faltningen av f och g. (8p)

LYCKA TILL!

/TG

Tabell med Laplacetransformer och trigonometriska formler

$f(t)$	$F(s)$
$af(t) + bg(t)$	$aF(s) + bG(s)$
$tf(t)$	$-F'(s)$
$t^n f(t)$	$(-1)^n F^{(n)}(s)$
$e^{-at} f(t)$	$F(s+a)$
$f(t-T)\theta(t-T)$	$e^{-Ts} F(s)$
$f'(t)$	$sF(s) - f(0)$
$f''(t)$	$s^2 F(s) - sf(0) - f'(0)$
$f^{(n)}(t)$	$s^n F(s) - \sum_{k=1}^{n} s^{n-k} f^{(k-1)}(0)$
$\int_0^t f(\tau)\, d\tau$	$\frac{F(s)}{s}$
$\theta(t)$	$\frac{1}{s}$
$\frac{t^n}{n!}$	$\frac{1}{s^{n+1}}$
e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$
$\cosh at$	$\frac{s}{s^2 - a^2}$
$\sinh at$	$\frac{a}{s^2 - a^2}$
$\cos bt$	$\frac{s}{s^2 + b^2}$
$\sin bt$	$\frac{b}{s^2 + b^2}$
$\frac{t}{2b} \sin bt$	$\frac{s}{(s^2 + b^2)^2}$
$\frac{1}{2b^3}(\sin bt - bt \cos bt)$	$\frac{1}{(s^2 + b^2)^2}$

$2 \sin a \sin b = \cos(a-b) - \cos(a+b)$
$2 \sin a \cos b = \sin(a-b) + \sin(a+b)$
$2 \cos a \cos b = \cos(a-b) + \cos(a+b)$

TMA683/TMA682 Tillämpad matematik K2/Bt2, 2018–01–13, kl 14:00-18:00.
Lösningar.

---

1. Laplacetransformering med $y(0) = 1$ ger, eftersom $\mathcal{L}[te^{-2t}] = \frac{1}{(s+2)^2}$ enligt första förskjutningsregeln,

$$sY(s) - y(0) + 4Y(s) = \frac{1}{(s+2)^2} \Longrightarrow$$
$$(s+4)Y(s) = 1 + \frac{1}{(s+2)^2} \Longrightarrow Y(s) = \frac{1}{s+4} + \frac{1}{(s+4)(s+2)^2}$$

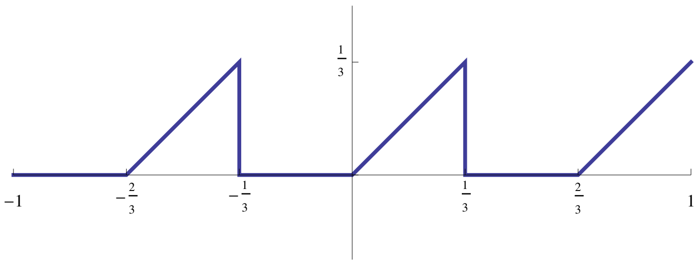
Partialbråksuppdelning i andra termen ger

$$\frac{1}{(s+4)(s+2)^2} = \frac{A}{s+4} + \frac{B}{s+2} + \frac{C}{(s+2)^2}$$

där vi kan bestämma $A = 1/4$, $B = -1/4$, $C = 1/2$. Alltså

$$Y(s) = \left(1 + \frac{1}{4}\right)\frac{1}{s+4} - \frac{1}{4}\frac{1}{s+2} + \frac{1}{2}\frac{1}{(s+2)^2} \Longrightarrow$$
$$y(t) = \frac{5}{4}e^{-4t} - \frac{1}{4}e^{-2t} + \frac{1}{2}te^{-2t} = \frac{1}{4}\left(5e^{-4t} - (1-2t)e^{-2t}\right), \ t \geq 0$$

där vi använt att $\mathcal{L}[e^{-4t}] = \frac{1}{s+4}$, $\mathcal{L}[e^{-2t}] = \frac{1}{s+2}$, $\mathcal{L}[te^{-2t}] = \frac{1}{(s+2)^2}$ (enligt första förskjutningsregeln).



Figur 1. Funktionen $f(x)$ med perioden $2/3$.

2. a) Från figur 1 ser vi att funktionen $f(x)$ varken är jämn eller udda. Alltså är

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\right)$$

med

$$a_n = \frac{1}{L}\int_0^{2L} f(x)\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\,dx, \quad n = 0, 1, \ldots$$
$$b_n = \frac{1}{L}\int_0^{2L} f(x)\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\,dx, \quad n = 1, 2, \ldots$$

där perioden är $2L = 2/3$, dvs $L = 1/3$. Vi har att

$$a_0 = 3\int_0^{2/3} f(x)\,dx = 3\int_0^{1/3} x\,dx = \frac{1}{6}$$

och, för $n = 1, 2, \ldots$,

$$a_n = 3\int_0^{1/3} x\cos(3n\pi x)\,dx = \frac{1}{n\pi}\left[x\sin(3n\pi x)\right]_{x=0}^{x=1/3} - \frac{1}{n\pi}\int_0^{1/3}\sin(3n\pi x)\,dx$$
$$= 0 + \frac{1}{3(n\pi)^2}\left[\cos(3n\pi x)\right]_{x=0}^{x=1/3} = \frac{\cos(n\pi) - 1}{3(n\pi)^3} = \frac{(-1)^n - 1}{3(n\pi)^2}$$

samt

$$b_n = 3\int_0^{1/3} x\sin(3n\pi x)\,dx = \frac{1}{n\pi}\big[x\sin(3n\pi x)\big]_{x=0}^{x=1/3} + \frac{1}{n\pi}\int_0^{1/3}\cos(3n\pi x)\,dx$$
$$= -\frac{\cos(n\pi)}{3n\pi} + \frac{1}{3(n\pi)^2}\big[\sin(3n\pi x)\big]_{x=0}^{x=1/3} = \frac{(-1)^{n+1}}{3n\pi}.$$

Alltså är

$$f(x) = \frac{1}{12} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n-1}{3(n\pi)^2}\cos(3n\pi x) + \frac{(-1)^{n+1}}{3n\pi}\sin(3n\pi x)\right)$$

b) Om vi sätter $x = 0$ i Fourierserien ovan får vi

$$f(0) = \frac{1}{12} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n-1}{3(n\pi)^2} = \frac{1}{12} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{-2}{3(2k-1)^2\pi^2} = \frac{1}{12} - \frac{2}{3\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2} = \frac{1}{12} - \frac{2}{3\pi^2}S$$

Eftersom $f(0) = 0$ får vi

$$S = \frac{3\pi^2}{2}\frac{1}{12} = \frac{\pi^2}{8}$$

3. Ansätt $u(x,t) = v(x,t) + S(x)$ och sätt in i ekvationen och randvillkoren:

$$\begin{cases} \ddot v(x,t) - 4v''(x,t) - 4S''(x) = 1, & x\in(0,1), \quad t>0, \\ v(0,t)+S(0) = 1, \quad v(1,t)+S(1) = 0, & t\geq 0, \\ v(x,0)+S(x) = 1-x^2, & x\in(0,1), \\ \dot v(x,0) = 0, & x\in(0,1). \end{cases}$$

Vi ser att om $S(x)$ uppfyller

$$\begin{cases} S''(x) = -\frac{1}{4}, & x\in(0,1), \\ S(0)=1, \quad S(1)=0 & \end{cases}$$

så löser $v(x,t)$ den homogena vågekvationen. Integration två gånger och insättning av randvillkoren ger att $S(x) = -\frac{1}{8}x^2 - \frac{7}{8}x + 1$.
$v(x,t)$ satisfierar nu den homogena vågekvationen,

$$\begin{cases} \ddot v(x,t) - 4v''(x,t) = 0, & x\in(0,1), \quad t>0, \\ v(0,t) = 0, \quad v(1,t) = 0, & t\geq 0, \\ v(x,0) = 1-x^2-S(x) = \frac{7}{8}(x-x^2), & x\in(0,1), \\ \dot v(x,0) = 0, & x\in(0,1). \end{cases}$$

För att bestämma $v(x,t)$, ansätt $v(x,t) = X(x)T(t)$. Insättning i differentialekvationen för v ger $4X''(x)T(t) = X(x)T''(t)$ eller $\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{4}\frac{T''(t)}{T(t)} = \lambda$. Vi har sett att för vågekvationen med homogena randvillkor är $\lambda < 0$. Sätt därför $\lambda = -\mu^2$. Detta ger

$$\begin{cases} X''(x) + \mu^2 X(x) = 0, \quad 0<x<1, \\ X(0) = X(1) = 0. \end{cases} \qquad T''(t) = -4\mu^2 T(t), \quad t>0.$$

Lösningen för $X(x)$ är då

$$X(x) = A\cos\mu x + B\sin\mu x.$$

$X(0) = 0 \Longrightarrow A = 0$ och $X(1) = 0 \Longrightarrow B\sin\mu = 0 \quad \Longrightarrow \mu = n\pi$ (ty $B = 0$ ger trivial lösning). Vi har alltså

$$\mu_n = \ n\pi, \qquad X_n(x) = B_n\sin n\pi x, \qquad n = 1,2,\ldots$$

($n = 0$ ger trivial lösning $X(x) = 0$ och $n < 0$ ger samma lösningar som $n > 0$). För $T(t)$ gäller då

$$T_n''(t) = -4\mu_n^2 T_n(t) \Longrightarrow T_n(t) = C_n\cos(2n\pi t) + D_n\sin(2n\pi t), \quad n = 1,2,\ldots.$$

Superposition ger den allmänna lösningen

$$v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}(C_n\cos(2n\pi t) + D_n\sin(2n\pi t))\sin(n\pi x).$$

Vi har också att

$$\dot v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}(-2n\pi C_n\sin(2n\pi t) + 2n\pi D_n\cos(2n\pi t))\sin(n\pi x).$$

Från begynnelsevillkoret $\dot{v}(x,0)=0$ fås att $D_n=0$, $n=1,2,\ldots$ och villkoret för $v(x,0)$ ger

$$v(x,0)=\frac{7}{8}(x-x^2)=\sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin n\pi x,$$

och vi ser att C_n är Fourier-sinus koefficienter för funktionen $\frac{7}{8}(x-x^2)$ på intervallet $(0,1)$, vilka ges av

$$\begin{aligned}
C_n &= 2\int_0^1 \frac{7}{8}(x-x^2)\sin(n\pi x)\,dx = -\frac{7}{4}\left[\frac{x-x^2}{n\pi}\cos(n\pi x)\right]_{x=0}^{1} + \frac{7}{4n\pi}\int_0^1 (1-2x)\cos(n\pi x)\,dx \\
&= \frac{7}{4n\pi}\left[\frac{1-2x}{n\pi}\sin(n\pi x)\right]_{x=0}^{1} - \frac{7}{4(n\pi)^2}\int_0^1 (-2)\sin(n\pi x)\,dx = \frac{7}{2(n\pi)^2}\left[-\frac{1}{n\pi}\cos(n\pi x)\right]_{x=0}^{1} \\
&= \frac{7}{2(n\pi)^3}\left(1-\cos(n\pi)\right) = \frac{7}{2}\frac{1-(-1)^n}{(n\pi)^3}
\end{aligned}$$

Alltså är lösningen

$$v(x,t)=\frac{7}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^n}{(n\pi)^3}\cos(2n\pi t)\sin(n\pi x)$$

och

$$u(x,t)=S(x)+v(x,t)=-\frac{1}{8}x^2-\frac{7}{8}x+1+\frac{7}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^n}{(n\pi)^3}\cos(2n\pi t)\sin(n\pi x)$$

4. Vi låter $\hat{u}_k \approx u(t_k)=u(k\Delta t)$ och approximerar derivatan på intervallet $t_k \le t < t_{k+1}$ med den finita differensen

$$u'(t)\approx \frac{\hat{u}_{k+1}-\hat{u}_k}{\Delta t},$$

där Δt är tidssteget. Enligt Crank-Nicolson-metoden approximerar vi också

$$\begin{aligned}
u(t) &\approx \frac{1}{2}\left(\hat{u}_{k+1}+\hat{u}_k\right) \\
f(t) &\approx \frac{1}{2}\left(f(t_{k+1})+f(t_k)\right)=\frac{1}{2}\big(f((k+1)\Delta t)+f(k\Delta t)\big)
\end{aligned}$$

för $t_k \le t < t_{k+1}$. Med $f(t)=t$ har vi då $t\approx \frac{1}{2}\big((k+1)\Delta t+k\Delta t\big)=(k+\frac{1}{2})\Delta t$. Genom insättning i ekvationen får vi alltså att

$$\frac{\hat{u}_{k+1}-\hat{u}_k}{\Delta t}+\frac{1}{2}\left(\hat{u}_{k+1}+\hat{u}_k\right)=(k+\frac{1}{2})\Delta t,$$

vilket leder till tidsstegningsschemat

$$\begin{cases}\hat{u}_{k+1}=\frac{1-\frac{\Delta t}{2}}{1+\frac{\Delta t}{2}}\hat{u}_k+\frac{k+\frac{1}{2}}{1+\frac{\Delta t}{2}}\Delta t, \quad k=0,1,2,\ldots \\ \hat{u}_0=u(0)=0\end{cases}$$

Med $\Delta t=1$ får vi ekvationen

$$\hat{u}_{k+1}=\frac{1}{3}\hat{u}_k+\frac{2}{3}\left(k+\frac{1}{2}\right)$$

och följande värden för $\hat{u}_j$, $j=0,1,2$:

$$\begin{aligned}
\hat{u}_0 &= 0 \\
\hat{u}_1 &= 0+\frac{2}{3}\left(0+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{3} \\
\hat{u}_2 &= \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\left(1+\frac{1}{2}\right)=\frac{10}{9}
\end{aligned}$$

där $\hat{u}_1\approx u(1)$ och $\hat{u}_2\approx u(2)$.

5.

a) För att $f(x)$ skall vara ortogonal mot alla konstanta funktioner räcker det att $\langle f, 1\rangle_{L_2(0,2)} = 0$, vilket ger att

$$0 = \langle f, 1\rangle_{L_2(0,2)} = \int_0^2 (x^5 - ax^3)\cdot 1\, dx = \left[\frac{x^6}{6} - a\frac{x^4}{4}\right]_0^2 = \frac{64}{6} - a\frac{16}{4}$$

och därmed $a = \frac{8}{3}$.

b) L_2-projektionen Pf av f på $\mathcal{P}^{(0)}(0,2)$ uppfyller $(f - Pf) \perp v, \forall v \in \mathcal{P}^{(0)}(0,2)$. Då funktionen $v(x) = 1$ utgör en bas för $\mathcal{P}^{(0)}(0,2)$, ansätter vi $Pf(x) = c$ med villkoret att $\langle f - c, 1\rangle = 0$, vilket ger

$$0 = \langle f - c, 1\rangle = \langle f, 1\rangle - \langle c, 1\rangle = 0 - \int_0^2 c\, dx = -2c$$

och alltså $Pf(x) = c = 0$.

6. Pga det inhomogena Dirichlet-randvillkoret söker vi lösningen u i mängden

$$V = \{v \in H^1(0,1) : v(0) = 0,\ v(1) = 5\} = \{v : ||v|| + ||v'|| < \infty,\ v(0) = 0,\ v(1) = 5\}$$

medan vi väljer testfunktioner från rummet

$$H_0^1 = \{v : ||v|| + ||v'|| < \infty,\ v(0) = v(1) = 0\}.$$

Vi multiplicerar alltså ekvationen med en testfunktion $v \in H_0^1(0,1)$ och integrerar över $[0,1]$. Genom partialintegration och med hänsyn till randdata ($v(0) = v(1) = 0$) får vi följande *variationsformulering*:

Finn $u \in V$ så att

$$\int_0^1 (-u'v' + 3u'v)\, dx = \int_0^1 e^x v(x)\, dx, \quad \forall v \in H_0^1(0,1).$$

För att formulera motsvarande *Finita Element Metod* med $cG(1)$-metoden inför vi den likformiga partitionen $\mathcal{T}_h$ av intervallet $[0,1]$ med steglängd h. Vi söker sedan den approximativa lösningen U i mängden

$$V_h = \big\{v : v \text{ är styckvis linjär och kontinuerlig på } \mathcal{T}_h \text{ och } v(0) = 0,\ v(1) = 5\big\}.$$

medan testfunktionerna väljs från

$$V_h^0 = \big\{v : v \text{ är styckvis linjär och kontinuerlig på } \mathcal{T}_h \text{ och } v(0) = v(1) = 0\big\}.$$

Finita element-formuleringen lyder alltså:

Finn $U \in V_h$ så att

$$\int_0^1 (-U'\varphi' + 3U'\varphi)\, dx = \int_0^1 e^x \varphi(x)\, dx, \quad \forall \varphi \in V_h^0,$$

7. Se kurslitteraturen, bladet om faltningar.

/TG