Matematik Chalmers

Tentamen i TMA683/TMA682 Tillämpad matematik K2/Bt2, 2018–08–23, kl 14:00-18:00

Telefon: Adam Malik, 031-772 5325; Examinator: Tobias Gebäck, 031-772 3547
Hjälpmedel: Endast tabell på baksidan av tesen. Kalkylator ej tillåten.
Betygsgränser, **3**: 20–29p, **4**: 30–39p och **5**: 40–50p
Lösningar/Granskning: Se kurshemsidan.

---

1. Använd Laplacetransformer för att lösa integro-differentialekvationen (9p)

$$\begin{cases} y'(t) + \displaystyle\int_0^t y(z)dz = e^{t-1}\theta(t-1), \qquad t > 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

där $\theta(t)$ är Heaviside's stegfunktion.

2. Bestäm Fourier *sinus*-serien med perioden π till funktionen (8p)

$$f(x) = 1 - \cos x, \quad x \in [0, \pi/2].$$

3. Använd variabelseparationsmetoden för att lösa den homogena värmeledningsekvationen (7p)

$$\begin{cases} \dot{u}(x,t) - 2u''(x,t) = 0, & x \in (0,1), \quad t > 0, \\ u(0,t) = u(1,t) = 0, & t \geq 0, \\ u(x,0) = u_0(x), & x \in [0,1]. \end{cases}$$

där $u_0(x) = \begin{cases} 2x, & x \in [0, \frac{1}{2}) \\ 2 - 2x, & x \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$.

4. Låt $f(x) = x$ och $g(x) = \sin x$, där $x \in [0, \pi]$.

a) Visa genom att beräkna normer och skalärprodukter att Cauchy-Schwarz olikhet är uppfylld för $\langle f, g \rangle$ på intervallet $[0, \pi]$. (4p)

b) Bestäm en funktion $h \in \mathcal{P}^{(1)}(0, \pi)$ som är ortogonal mot g. (3p)

5. Härled *variationsformulering* och *finita element-formulering* för den styckvis linjära finita-element-approximationen för randvärdesproblemet (9p)

$$\begin{cases} -u''(x) + u(x) = x, \quad x \in [0,1], \\ u(0) = 0, \\ u'(1) = 0, \end{cases}.$$

Härled också det motsvarande linjära ekvationssystemet för en likformig partition $\mathcal{T}_h$ av intervallet $[0,1]$ med steglängd $h = 1/2$. Kända matriselement behöver ej beräknas.

6. Betrakta den partiella differentialekvationen (10p)

$$\begin{cases} -u''(x) = f, & 0 < x < 1, \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases}$$

Givet en likformig partition av $[0,1]$ med steglängd h, härled *a priori*-feluppskattningen

$$\|u - U\|_E \leq C_i h \|u''\|_{L_2}.$$

för den styckvis linjära finita element-lösningen $U(x)$. Energinormen definieras av

$$\|w\|_E = \|w'\|_{L_2} = \Big(\int_0^1 |w'(x)|^2 \, dx \Big)^{1/2},$$

LYCKA TILL!
/TG

Tabell med Laplacetransformer och trigonometriska formler

$f(t)$	$F(s)$
$af(t) + bg(t)$	$aF(s) + bG(s)$
$tf(t)$	$-F'(s)$
$t^n f(t)$	$(-1)^n F^{(n)}(s)$
$e^{-at} f(t)$	$F(s+a)$
$f(t-T)\theta(t-T)$	$e^{-Ts} F(s)$
$f'(t)$	$sF(s) - f(0)$
$f''(t)$	$s^2 F(s) - sf(0) - f'(0)$
$f^{(n)}(t)$	$s^n F(s) - \sum_{k=1}^{n} s^{n-k} f^{(k-1)}(0)$
$\int_0^t f(\tau)\, d\tau$	$\frac{F(s)}{s}$
$\theta(t)$	$\frac{1}{s}$
$\frac{t^n}{n!}$	$\frac{1}{s^{n+1}}$
e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$
$\cosh at$	$\frac{s}{s^2 - a^2}$
$\sinh at$	$\frac{a}{s^2 - a^2}$
$\cos bt$	$\frac{s}{s^2 + b^2}$
$\sin bt$	$\frac{b}{s^2 + b^2}$
$\frac{t}{2b} \sin bt$	$\frac{s}{(s^2 + b^2)^2}$
$\frac{1}{2b^3}(\sin bt - bt \cos bt)$	$\frac{1}{(s^2 + b^2)^2}$

$2 \sin a \sin b = \cos(a-b) - \cos(a+b)$
$2 \sin a \cos b = \sin(a-b) + \sin(a+b)$
$2 \cos a \cos b = \cos(a-b) + \cos(a+b)$

TMA683/TMA682 Tillämpad matematik K2/Bt2, 2018–08–23, kl 14:00-18:00.
Lösningar.

---

1. Enligt tabellen är $\mathcal{L}[f(t-T)\theta(t-T)] = e^{-sT}F(s)$ (2:a förskjutningsregeln). Med $f(t) = e^t$ fås $F(s) = \frac{1}{s-1}$ och med $T = 1$ blir Laplacetransformen av högerledet $\mathcal{L}[e^{t-1}\theta(t-1)] = e^{-s}\frac{1}{s-1}$. Laplacetransformering av ekvationen med $y(0) = 1$ ger alltså (med hjälp av formler för transformen av derivata och integral från tabellen) att

$$\begin{aligned} & sY(s) - y(0) + \frac{Y(s)}{s} = e^{-s}\frac{1}{s-1} \\ \implies & (s^2+1)Y(s) = s + e^{-s}\frac{s}{s-1} \\ \implies & Y(s) = \frac{s}{s^2+1} + e^{-s}\frac{s}{(s-1)(s^2+1)} \end{aligned}$$

Den första termen finns med i tabellen som Laplacetransformen av $\cos t$. Faktorn e^{-s} i andra termen kan hanteras med hjälp av 2:a förskjutningsregeln. Partialbråksuppdelning av resten av andra termen ger ansatsen

$$\frac{s}{(s-1)(s^2+1)} = \frac{A}{s-1} + \frac{Bs+C}{s^2+1},$$

där A kan bestämmas med handpåläggning (förläng med $s-1$ och sätt $s = 1$) till $A = 1/2$. C kan bestämmas genom att sätta $s = 0$ till $C = A = 1/2$. Slutligen bestäms B genom att multiplicera ihop och identifiera koefficienter för s^2 till $B = -A = -1/2$. Alltså är

$$\begin{aligned} & Y(s) = \frac{s}{s^2+1} + \frac{1}{2}\left(\frac{e^{-s}}{s-1} - \frac{se^{-s}}{s^2+1} + \frac{e^{-s}}{s^2+1}\right) \\ \implies & y(t) = \cos t + \frac{1}{2}\theta(t-1)\left(e^{t-1} - \cos(t-1) + \sin(t-1)\right),\ t \geq 0 \end{aligned}$$

där vi använt att $\mathcal{L}[e^t] = \frac{1}{s-1}$, 2:a förskjutningsregeln (med $T = 1$) samt Laplacetransformer av $\sin t$ och $\cos t$, vilka alla finns i tabellen.

2. För att få en sinus-serie utvidgas funktionen f till intervallet $[-\pi/2, \pi/2]$ som en udda funktion och görs periodisk med perioden $2L = \pi$. Den allmänna formeln är

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

med

$$b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\,dx, \quad n = 1, 2, \ldots$$

där alltså perioden är $2L = \pi$, dvs $L = \pi/2$.

Vi har alltså, för $n = 1, 2, \ldots$,

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{4}{\pi}\int_0^{\pi/2}(1-\cos x)\sin(2nx)\,dx \\ &= \frac{4}{\pi}\Big[-\frac{1}{2n}\cos(2nx)\Big]_{x=0}^{x=\pi/2} - \frac{4}{\pi}\int_0^{\pi/2}\frac{1}{2}\left(\sin(2nx-x) + \sin(2nx+x)\right)\,dx \\ &= \frac{2}{n\pi}(1-(-1)^n) - \frac{2}{\pi}\Big[-\frac{1}{2n-1}\cos((2n-1)x) - \frac{1}{2n+1}\cos((2n+1)x)\Big]_{x=0}^{x=\pi/2} \\ &= \frac{2}{n\pi}((-1)^{n+1}+1) - \frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n+1}\right) = \frac{2}{\pi}\left[\frac{(-1)^{n+1}+1}{n} - \frac{4n}{4n^2-1}\right] \end{aligned}$$

Alltså är Fourier sinus-serien

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(-1)^{n+1} + 1}{n} - \frac{4n}{4n^2 - 1} \right) \sin(2nx)$$

3. För att bestämma $u(x,t)$, ansätt $u(x,t) = X(x)T(t)$. Insättning i differentialekvationen ger $2X''(x)T(t) = X(x)T'(t)$ eller $\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{2}\frac{T'(t)}{T(t)} = \lambda$, där λ är en konstant. Vi har sett att för värmeledningsekvationen med homogena randvillkor är $\lambda < 0$. Sätt därför $\lambda = -\mu^2$. Detta ger

$$\begin{cases} X''(x) + \mu^2 X(x) = 0, \quad 0 < x < 1, \\ X(0) = X(1) = 0. \end{cases} \qquad T'(t) = -2\mu^2 T(t), \quad t > 0.$$

Lösningen för $X(x)$ är då

$$X(x) = A\cos\mu x + B\sin\mu x.$$

Randvillkoren $X(0) = 0 \implies A = 0$ och $X(1) = 0 \implies B\sin\mu = 0 \quad \implies \mu = n\pi$, där n är ett heltal (ty $B = 0$ ger trivial lösning). Vi har alltså

$$\mu_n = n\pi, \qquad X_n(x) = B_n \sin n\pi x, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

($n = 0$ ger trivial lösning $X(x) = 0$ och $n < 0$ ger samma lösningar som $n > 0$). För $T(t)$ gäller då

$$T_n'(t) = -2\mu_n^2 T_n(t) \quad \implies \quad T_n(t) = C_n \exp(-2(n\pi)^2 t), \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Superposition ger den allmänna lösningen

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \exp(-2(n\pi)^2 t) \sin(n\pi x).$$

Begynnelsevillkoret $u(x,0) = u_0(x)$ ger

$$u_0(x) = u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin(n\pi x),$$

och vi ser att C_n är Fourier-sinus koefficienter för funktionen $u_0(x)$ på intervallet $(0,1)$, vilka ges av

$$\begin{aligned}
C_n &= 2\int_0^1 u_0(x)\sin(n\pi x)\,dx = 2\int_0^{1/2} 2x\sin(n\pi x)dx + 2\int_{1/2}^1 (2-2x)\sin(n\pi x)dx \\
&= \frac{4}{n\pi}\Big[-x\cos(n\pi x)\Big]_{x=0}^{1/2} + \frac{4}{n\pi}\int_0^{1/2}\cos(n\pi x)\,dx \\
&\quad + \frac{4}{n\pi}\Big[-(1-x)\cos(n\pi x)\Big]_{x=1/2}^{1} - \frac{4}{n\pi}\int_{1/2}^1 \cos(n\pi x)\,dx \\
&= -\frac{2}{n\pi}\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + \frac{4}{(n\pi)^2}\Big[\sin(n\pi x)\Big]_{x=0}^{1/2} + \frac{2}{n\pi}\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) - \frac{4}{(n\pi)^2}\Big[\sin(n\pi x)\Big]_{x=1/2}^{1} \\
&= \frac{8}{(n\pi)^2}\sin\frac{n\pi}{2}
\end{aligned}$$

Alltså är lösningen

$$u(x,t) = \frac{8}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)e^{-2(n\pi)^2 t}\sin(n\pi x) = \frac{8}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^2}e^{-2(2k+1)^2\pi^2 t}\sin((2k+1)\pi x)$$

eftersom

$$\sin\frac{n\pi}{2} = \begin{cases} 0, & n \text{ jämnt} \\ (-1)^k, & n = 2k+1, \quad k = 0, 1, \ldots \end{cases}$$

4.

a) Vi beräknar $\langle f,g\rangle = \int_0^\pi x\sin x dx = [-x\cos x]_0^\pi + \int_0^\pi \cos x dx = -\pi\cos\pi = \pi$, samt $\|f\|_{L_2(0,\pi)} = \big(\int_0^\pi |x|^2 dx\big)^{1/2} = \left(\frac{\pi^3}{3}\right)^{1/2}$ och $\|g\|_{L_2(0,\pi)} = \big(\int_0^\pi |\sin x|^2 dx\big)^{1/2} = \big(\frac{1}{2}\int_0^\pi (1-\cos 2x)dx\big)^{1/2} = \big(\big[x - \frac{1}{2}\sin 2x\big]_0^\pi\big)^{1/2} = \big(\frac{\pi}{2}\big)^{1/2}$.
Vi vill visa att $|\langle f,g\rangle| \le \|f\|\|g\|$, dvs att

$$\pi \le \sqrt{\frac{\pi^3}{3}\cdot\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^2}{\sqrt{6}}.$$

Men detta är sant, ty om vi kvadrerar båda sidor och förkortar med π^2 gäller det att visa att $1 \le \pi^2/6$, vilket är uppenbart sant eftersom $\pi^2 > 9$.

b) Att h är ortogonal mot g betyder att $\langle h,g\rangle = 0$. Vi ansätter $h(x) = ax + b \in \mathcal{P}^{(1)}(0,\pi)$ och skall bestämma a och b. Vi har

$$0 = \langle h,g\rangle = \int_0^\pi (ax+b)\sin x dx = a\pi + b\,[-\cos x]_0^\pi = \pi a + 2b.$$

Vi kan alltså välja t.ex. $a = 1$ och $b = -\pi/2$ (flera val är möjliga).

5. Multiplicera ekvationen med en testfunktion $v \in V$, där

$$V = \{v : ||v||_{L_2(0,1)} + ||v'||_{L_2(0,1)} < \infty,\ v(0) = 0\}$$

och integrera över $[0,1]$. Genom partialintegration och med hänsyn till randdata får vi följande *variationsproblem*: Finn $u \in V$ så att

$$\int_0^1 (u'v' + uv)dx = \int_0^1 v dx, \quad \forall v \in V. \tag{1}$$

En motsvarade *Finita Element Metod* med *cG*(1)-metoden (styckvis linjära basfunktioner) formuleras som: Hitta $U \in V_h$ så att

$$\int_0^1 (U'v' + Uv)dx = \int_0^1 v dx, \quad \forall v \in V_h \tag{2}$$

där

$$V_h = \big\{v : v \text{ är styckvis linjär och kontinuerlig i en partition av } [0,1] \text{ med steglängd } h,\ v(0) = 0\big\}.$$

Vi ansätter $U(x) = \xi_1\varphi_1(x) + \xi_2\varphi_2(x)$ där

$$\varphi_j(x) = \begin{cases} \frac{1}{h}(x - x_{j-1}), & x \in [x_{j-1}, x_j) \\ \frac{1}{h}(x_j - x), & x \in [x_j, x_{j+1}) \\ 0, & \text{annars} \end{cases}, \qquad j = 1,2$$

är hattfunktionerna svarande mot nodpunkterna $x_1 = 1/2$ och $x_2 = 1$. Notera att φ_2 är en "halv hatt" och att ingen basfunktion ("hatt") behövs i $x = 0$ eftersom vi har ett homogent Dirichlet-villkor $u(0) = 0$.
Vi sätter in $U(x) = \xi_1\varphi_1(x) + \xi_2\varphi_2(x)$ i (2) och väljer testfunktioner $\varphi = \varphi_i$, $i = 1,2$. Vi får då ekvationssystemet

$$(A + M)\,\xi = b,$$

där A är styvhetsmatrisen med element $A_{ij} = \int_0^1 \varphi_i'\varphi_j' dx$, $i,j = 1,2$, och M är massmatrisen med element $M_{ij} = \int_0^1 \varphi_i\varphi_j dx$, $i,j = 1,2$. b är högerledsvektorn med element $b_i = \int_0^1 \varphi_i dx$, $i = 1,2$ och $\xi = (\xi_1,\xi_2)^T$ är lösningsvektorn.
Beräkning av matriselementen ger $A_{11} = 2/h$, $A_{i,i\pm1} = -1/h$, $i = 1,2$ och $A_{22} = 1/h$ (halv hatt), samt $M_{11} = 2h/3$, $M_{i,i\pm1} = h/6$, $i = 1,2$ och $M_{22} = h/3$. För högerledsvektorn får vi

$$b_1 = \int_0^1 x\varphi_1(x)\,dx = \int_0^{1/2} x2x\,dx + \int_{1/2}^1 x(2-2x)\,dx = \left[\frac{2x^3}{3}\right]_{x=0}^{1/2} + \left[x^2 - \frac{2x^3}{3}\right]_{x=1/2}^{1}$$
$$= \frac{1}{12} + (1 - \frac{2}{3}) - (\frac{1}{4} - \frac{1}{12}) = \frac{1}{4}$$

och

$$b_2 = \int_0^1 x\varphi_2(x)dx = \int_{1/2}^1 x(2x-1)dx = \left[\frac{2x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right]_{x=1/2}^1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{12} - \frac{1}{8}\right) = \frac{5}{24}$$

Alltså blir ekvationssystemet, med $h = 1/2$,

$$\left(2\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{12}\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/4 \\ 5/24 \end{bmatrix},$$

eller om man så vill

$$\begin{bmatrix} 104 & -46 \\ -46 & 52 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 5 \end{bmatrix}$$

(Lösningen är $\xi \approx (0.165, 0.242)^T$.)

6. Se kursboken, sats 7.1 och 7.2.

/TG