TMA683 Teorifrågor inför tentamen HT2018

1. (Fourier: exempel 1:4) Antag $\omega \in \mathbb{R}$. Visa att följande Laplacetransformer gäller:
$$\mathcal{L}[\cos(\omega t)](s) = \frac{s}{s^2+\omega^2} \qquad \mathcal{L}[\sin(\omega t)](s) = \frac{\omega}{s^2+\omega^2}.$$

2. Antag att $f(t) = 0,\ g(t) = 0$ för $t < 0$, och definiera faltningen
$$(f * g)(t) = \int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau.$$
Visa att $\mathcal{L}[f * g](s) = F(s)G(s)$.
(se separat material på hemsidan)

3. (Fourier: Sats 1:4) Formulera och bevisa "andra förskjutningslagen" för Laplacetransformer:
$$\mathcal{L}[f(t-T)\theta(t-T)] = e^{-Ts}F(s).$$

4. (Fourier: Sats 1:7) Visa att följande Laplacetransformer gäller:
$$\begin{array}{ll} a) & \mathcal{L}[f'(t)](s) = sF(s) - f(0), \\ b) & \mathcal{L}[f''(t)](s) = s^2F(s) - sf(0) - f'(0). \end{array}$$

5. (Fourier: Lemma 2:1) Visa att om funktionen F är periodisk med perioden P, så är
$$\int_a^{a+P} F(x)\,dx$$
oberoende av a.

6. (Fourier, sats 2:9 (Bessels olikhet)) Visa att om funktionen f är 2π-periodisk och integrerbar på $[-\pi, \pi]$ och C_n är de komplexa Fourierkoefficienterna till f, så är
$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |C_n|^2 \le \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(\theta)|^2 d\theta.$$

7. Formulera och bevisa *Riemann-Lebesgues lemma.* (Fourier: Lemma 2:4)

8. (Sats 5.1:(1)) Antag att $f \in \mathcal{C}^2(a,b)$. Visa att det finns en konstant C, oberoende av f och intervallet (a,b), så att vi för den linjära interpolanten $\pi_1 f$ på $[a,b]$ har följande feluppskattning:
$$||\pi_1 f - f||_{L_\infty(a,b)} \leq C(b-a)^2 ||f''||_{L_\infty(a,b)}$$

9. (Sats 3.6) Betrakta randvärdesproblemet
$$\text{(BVP)} \qquad \begin{cases} -\Big(a(x)u'(x)\Big)' = f, & 0 < x < 1, \\ u(0) = u(1) = 0, & \end{cases} .$$
där $f \in \mathcal{C}(0,1)$ och $a \in \mathcal{C}^1(0,1)$. Ange en variationsformulering (VF) för (BVP) och visa att
$$\text{(BVP)} \iff \text{(VF) och } u \in \mathcal{C}^2(0,1).$$

10. Formulera och bevisa *Poincarés olikhet* på ett intervall $[0,L]$ (sats 3.3, en-dimensionella fallet).

11. (Sats 7.1 och 7.2, med $a(x) = 1$) Betrakta den partiella differentialekvationen
$$\text{(BVP)} \qquad \begin{cases} -u''(x) = f, & 0 < x < 1, \\ u(0) = u(1) = 0, & . \end{cases}$$
Låt $V_h^0 := \{v \,:\, v$ är styckvis linjär och kontinuerlig på $[0,1]$, med $v(0) = v(1) = 0\}$. och visa att finita element-lösningen $U \in V_h^0$ är den bästa approximativa lösningen av (BVP) i energinormen
$$\|w\|_E = \|w'\|_{L_2} = \Big(\int_0^1 |w'(x)|^2\,dx\Big)^{1/2},$$
dvs visa att
$$\|u - U\|_E \leq \|u - v\|_E, \qquad \forall v \in V_h^0.$$
Använd också detta resultat för att visa *a priori*-feluppskattningen
$$\|u - U\|_E \leq C_i \|hu''\|_{L_2}.$$

12. (Sats 9.1) Betrakta den partiella differentialekvationen
$$\begin{cases} \dot{u} - u'' = f(x), & 0 < x < 1, \quad t > 0, \\ u(0,t) = u(1,t) = 0, & u(x,0) = u_0(x). \end{cases}$$
Visa följande stabilitetsolikheter:
$$a) \qquad ||u(\cdot,t)|| \leq ||u_0|| + \int_0^t ||f(\cdot,s)||\,ds,$$
$$b) \qquad ||u_x(\cdot,t)||^2 \leq ||u_0'||^2 + \int_0^t ||f(\cdot,s)||^2\,ds.$$

13. (Sats 9.2) Betrakta den partiella differentialekvationen

$$\begin{cases} \dot{u} - u'' = 0, & 0 < x < 1, \quad t > 0, \\ u(0,t) = u'(1,t) = 0, & t > 0 \\ u(x,0) = u_0(x) & 0 < x < 1. \end{cases}$$

Visa följande stabilitets(o)likheter:

$$(a) \quad \frac{d}{dt}||u||^2 + 2||u'||^2 = 0. \qquad (b) \quad ||u(\cdot,t)|| \leq e^{-t}||u_0||.$$

14. (Sats 9.5) Betrakta följande en-dimensionella vågekvation:

$$\begin{cases} \ddot{u} - u'' = 0, & 0 < x < 1, \quad t > 0, \\ u(0,t) = u(1,t) = 0, & \\ u(x,0) = u_0(x), & \dot{u}(x,0) = v_0(x). \end{cases}$$

Visa att den totala energin är konstant (konservering av energin). Dvs, visa att

$$\frac{1}{2}||\dot{u}||^2 + \frac{1}{2}||u'||^2 = \text{konstant}.$$