

TMA683 TILLÄMPAD MATEMATIK
UPPGIFTER OM INTERPOLATION OCH KVADRATUR

1. Bestäm den styckvis linjära interpolanten $\pi_h f(x)$ då intervallet I delas in i tre lika stora delintervall, då
 - a) $f(x) = 9x^2 - x^4$, och $I = [0, 3]$
 - b) $f(x) = \sin x$, och $I = [0, \frac{\pi}{2}]$
 - c) $f(x) = \frac{1}{x}$, och $I = [1, \frac{5}{2}]$Använd också sats 5.3 a) (ekv. (5.1.22)) för att uppskatta felet i approximationen i L_1 - och L_∞ -norm.

2. Bestäm L_2 -projektionerna av följande funktioner i $\mathcal{P}^{(q)}(a, b)$:
 - a) $f(x) = 9x^2 - x^4$, i $\mathcal{P}^{(1)}(0, 1)$
 - b) $f(x) = \sin x$, i $\mathcal{P}^{(1)}(0, \frac{\pi}{2})$

3. Bestäm interpolanten $\Pi_2 f \in \mathcal{P}^{(2)}(0, 1)$ av funktionen $f(x) = e^x + x$ på en likformig partition $x_0 = 0$, $x_1 = 1/2$, $x_2 = 1$ av intervallet $I = [0, 1]$ och med de givna basfunktionerna nedan
 - a) $\mathcal{P}^{(2)}(0, 1) = \text{Span}\{1, x, x^2\}$
 - b) $\mathcal{P}^{(2)}(0, 1) = \text{Span}\{\lambda_0(x), \lambda_1(x), \lambda_2(x)\}$

SVAR

1. a)

$$\pi_h f(x) = \begin{cases} 8x, & x \in [0, 1) \\ 12x - 4, & x \in [1, 2) \\ 60 - 20x, & x \in [2, 3] \end{cases}$$

Feluppskattningar: $\|\pi_h f - f\|_{L_1(0,3)} \leq (54 + 12\sqrt{6})c$; $\|\pi_h f - f\|_{L_\infty(0,3)} \leq 90c$ för någon interpolationskonstant c .

b)

$$\pi_h f(x) = \begin{cases} \frac{3}{\pi}x, & x \in [0, \frac{\pi}{6}) \\ \frac{3}{\pi}(\sqrt{3} - 1)x + 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}, & x \in [\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}) \\ \frac{3}{\pi}(2 - \sqrt{3})x + \frac{3\sqrt{3}}{2} - 2, & x \in [\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}] \end{cases}$$

Feluppskattningar: $\|\pi_h f - f\|_{L_1(0, \frac{\pi}{2})} \leq \frac{\pi^2}{36}c$; $\|\pi_h f - f\|_{L_\infty(0, \frac{\pi}{2})} \leq \frac{\pi^2}{36}c$ för någon interpolationskonstant c .

c)

$$\pi_h f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}(5 - 2x), & x \in [1, \frac{3}{2}) \\ \frac{1}{6}(7 - 2x), & x \in [\frac{3}{2}, 2) \\ \frac{1}{10}(9 - 2x), & x \in [2, \frac{5}{2}] \end{cases}$$

Feluppskattningar: $\|\pi_h f - f\|_{L_1(0, \frac{5}{2})} \leq \frac{21}{100}c$; $\|\pi_h f - f\|_{L_\infty(0, \frac{5}{2})} \leq \frac{1}{2}c$ för någon interpolationskonstant c .

2. a) $Pf(x) = \frac{41}{5}x - \frac{13}{10}$

b) $Pf(x) = \left(24 \frac{4-\pi}{\pi^3}\right)x + 8 \frac{\pi-3}{\pi^2}$

3. a) $\pi_2 f(x) = 1 + (-e + 4e^{0.5} - 2)x + (2e - 4e^{0.5} + 2)x^2$

b) $\lambda_0(x) = 2x^2 - 3x + 1$, $\lambda_1(x) = -4x^2 + 4x$, $\lambda_2(x) = 2x^2 - x$

$\Rightarrow \pi_2 f(x) = 1 + (-e + 4e^{0.5} - 2)x + (2e - 4e^{0.5} + 2)x^2$