FEM

Implementation

Christoffer Cromvik

FEM i en dimension

Exempel: Finn $u(x)$ så att

$$-u'' + u = x, \quad 0 < x < 1, \quad u'(0) = 0, \quad u'(1) = 0.$$

Variationsformulera ($\times v$ & $\int_0^1$)

$$\int_0^1 v(x)\,x = \int_0^1 v\,(-u'' + u) = v\,(-u')|_0^1 + \int_0^1 v'\,u' + v\,u,$$

FEM, forts.

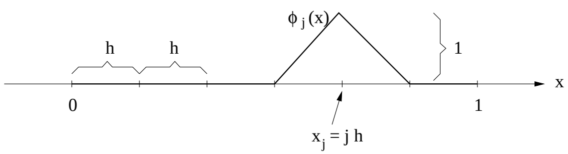
d.v.s.,

$$\underbrace{\int_0^1 v'\,u' + v\,u}_{a(v,u)} = \underbrace{\int_0^1 v\,f}_{l(v)} \quad \forall v(x).$$

FEM, forts.

Diskretisering i finita element

Dela in området $(0,1)$ i m element/intervall av storlek h:



Sök $U(x) = U_1\,\phi_1(x) + ... + U_m\,\phi_m(x)$, d.v.s., $U_1, .., U_m$ så att

$$\int_0^1 (\phi_j'\,U' + \phi_j\,U) = \int_0^1 \phi_j\,x \quad j = 1, .., m.$$

FEM, forts.

Detta resulterar i m ekvationer för de m okända $U_1, .., U_m$ enligt:

$$U_1 \underbrace{\int_0^1 \phi_j' \, \phi_1' + \phi_j \, \phi_1}_{a_{j1}} + U_2 \underbrace{\int_0^1 ..}_{a_{j2}} + .. \quad = \underbrace{\int_0^1 \phi_j(x) \, x}_{b_j},$$

d.v.s,

FEM, forts.

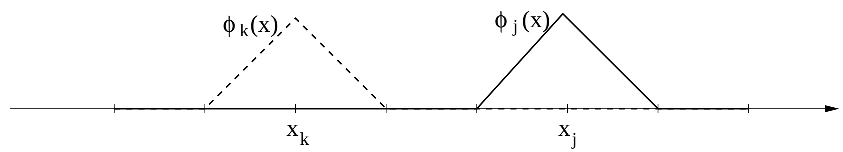
$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & . & a_{1m} \\ . & . & . \\ a_{j1} & . & a_{jm} \\ . & . & . \\ a_{m1} & . & a_{mm} \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ . \\ . \\ U_m \end{bmatrix}}_{U} = \underbrace{\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ . \\ b_m \end{bmatrix}}_{b} \Leftrightarrow U = A^{-1} b,$$

där

FEM, forts.

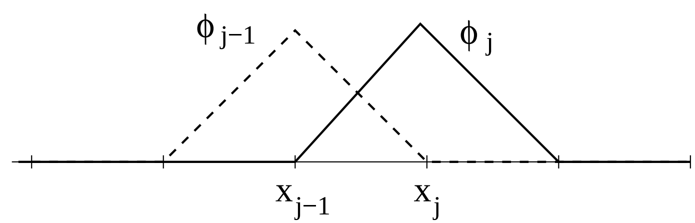
$$a_{jk} = \int_0^1 \phi_j' \, \phi_k' + \phi_j \, \phi_k.$$

Notera att A är *gles*, eftersom



FEM, forts.

För $k = j - 1$ har vi



$$a_{jk} = a_{j,j-1} = \int_{x_{j-1}}^{x_j} \frac{1}{h} \left(-\frac{1}{h}\right) + \frac{x - x_{j-1}}{h} \, \frac{x_j - x}{h} = -\frac{1}{h} + \frac{1}{6} h,$$
$$b_j = \int_0^1 \phi_j(x) \, x = x_j \int_0^1 \phi_j = h \, x_j, \quad j < m,$$

och så vidare..

FEM, forts.

Vi kan skriva detta som $A = S + M$ där

$$S = \frac{1}{h}\begin{bmatrix} 1 & -1 & & 0 \\ -1 & 2 & . & \\ & . & . & \\ 0 & & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad M = h\begin{bmatrix} 1/3 & 1/6 & & 0 \\ 1/6 & 2/3 & . & \\ & . & . & \\ 0 & & 1/6 & 1/3 \end{bmatrix},$$

$$b = h^2 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ . \\ m-1 \\ m \end{bmatrix}$$

FEM, forts.

Finita element i rum och tid

Låt oss betrakta värmeledningsekvationen

$$\dot{u} - u'' = f, \quad u'(0,t) = 0,\ u'(1,t) = 0,\ u(x,0) = u_0(x),$$

Variationsformuleringen är nu

$$\int_{I_n}\int_0^1 v\,\dot{u} + \int_{I_n}\int_0^1 v'\,u' = \int_{I_n}\int_0^1 v\,f \quad \forall v.$$

FEM, forts.

Vi gör ansatsen

$$U(x,t) = U_{n-1}\,\psi_{n-1}(t) + U_n(x)\,\psi_n(t)$$

där

$$\psi_n(t) = \frac{t - t_{n-1}}{k}$$

och

$$U_n(x) = U_{n,1}\,\phi_1(x) + U_{n,2}\,\phi_2(x) + \ldots + U_{n,m}\,\phi_m(x),$$

d.v.s., $U(x,t)$ är styckvis linjär i rum och tid.

FEM, forts.

Nodvärdena $U_{n,k}$ bestäms av

$$\int_{I_n}\int_0^1 \phi_j\,\underbrace{\frac{U_n - U_{n-1}}{k}}_{\dot{U}} + \int_{I_n}\int_0^1 \phi_j'\,\underbrace{(U_{n-1}'\,\psi_{n-1} + U_n'\,\psi_n)}_{U'}$$

$$= \int_{I_n}\int_0^1 \phi_j\,f, \quad j = 1,..,m,$$

d.v.s.,

FEM, forts.

$$\underbrace{\int_0^1 \phi_j\, U_n}_{M\, U_n} - \underbrace{\int_0^1 \phi_j\, U_{n-1}}_{M\, U_{n-1}} + \underbrace{\int_{I_n} \psi_{n-1}}_{\frac{k}{2}} \underbrace{\int_0^1 \phi_j'\, U_{n-1}'}_{S\, U_{n-1}} + \underbrace{\int_{I_n} \psi_n}_{\frac{k}{2}} \underbrace{\int_0^1 \phi_j'\, U_n'}_{S\, U_n}$$

$$= \underbrace{\int_{I_n} \int_0^1 \phi_j\, f,}_{F_n}$$

FEM, forts.

alltså

$$(M + \frac{k}{2}\, S)\, U_n = (M - \frac{k}{2}\, S)\, U_{n-1} + k\, F_n,$$

av vilket vi successivt kan beräkna $U_n = \begin{bmatrix} U_{n,1} \\ . \\ U_{n,m} \end{bmatrix}$ från U_{n-1} och F_n.

Tidsstegningsmetoden kallas **Crank-Nicolson.**

En annan metod, **Bakåt Euler**, ger ekvationen $(M + k\, S\,)\, U_n = M\, U_{n-1} + k\, F_n$.

Assemblering.

Assemblering

Betrakta problemet

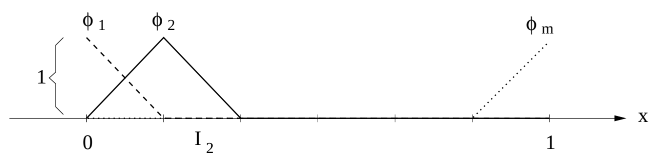
$$-u'' + u = f, \quad 0 < x < 1, \quad u'(0) = 0, \quad u'(1) = 0,$$

med variatationsformulering

$$\int_0^1 v'\, u' + v\, u = \int_0^1 v\, f, \quad \forall v = v(x).$$

Assemblering, forts.

Med ansatsen $U(x) = U_1\, \phi_1(x) + .. + U_m\, \phi_m(x)$



och byte u mot U, v mot ϕ_j, får vi för $U = \begin{bmatrix} U_1 \\ . \\ U_m \end{bmatrix}$:

$$\underbrace{(S + M)}_{:= A}\, U = b,$$

där

Assemblering, forts.

$$S = \begin{array}{cl} \begin{bmatrix} & & \cdot & & \\ & & \cdot & & \\ \cdot & \cdot & \int_0^1 \phi_j' \, \phi_k' & \cdot & \cdot \\ & & \cdot & & \\ & & \cdot & & \end{bmatrix} & \leftarrow \text{rad } j \\ \underbrace{\qquad}_{\text{kol } k} & \end{array}$$

och motsvarande för M och b.

Notera att

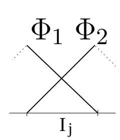
Assemblering, forts.

$$S = \begin{bmatrix} \int_1 & \int_1 & 0 & & 0 \\ \int_1 & \int_1 + \int_2 & \int_2 & 0 & \\ 0 & \int_2 & \int_2 + \int_3 & \int_3 & \\ & 0 & \int_3 & \int_3 + \int_4 & \\ & & & & \\ 0 & & & & \end{bmatrix}$$

Local stiffness matrix

$$\int_j = \int_{I_j}$$

$$\int_3 \Phi_1' \, \Phi_2'$$



med lokal styvhetsmatris dS definierad enligt

Assemblering, forts.

$$dS_3 = \begin{bmatrix} \int_{I_3} \phi_3' \, \phi_3' & \int_{I_3} \phi_3' \, \phi_4' \\ \int_{I_3} \phi_4' \, \phi_3' & \int_{I_3} \phi_4' \, \phi_4' \end{bmatrix}$$

Assemblering, forts.

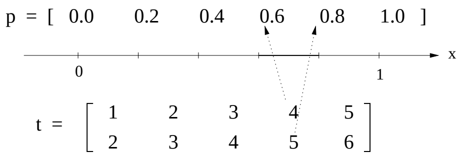
Leder till *assembleringsalgoritm* enligt:

```
for el = 1 :  m-1
  dS(el) = ...
  addera dS(el) till S
end
```

Liknande för M och b.

Beräkning av dS(el)

Datastrukturer för nodkoordinater och element-nod koppling:



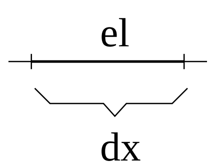
I kolumnerna i p finns koordinaterna för olika noder. Kolumnerna i t ger nodnummer till olika element. Till exempel, element 4 har noder 4 och 5. Koordinaterna till dessa är $p(4) = p(t(1,4))$ och $p(5) = p(t(2,4))$. I allmänhet ges koordinaterna för element el av

$$x = p(t(:,el)).$$

Beräkning av dS(el), forts.

Integralerna i $dS(el)$ ges av elementarean

$$dx = x(2) - x(1) = p(t(2,el)) - p(t(1,el)).$$



tillsammans med derivatorna för de lokala basfunktionerna Φ_1 och Φ_2, d.v.s.

$$DPhi = [-1/dx, 1/dx].$$

Beräkning av dS(el), forts.

$$dS(el) = DPhi^\top * DPhi * dx = \begin{bmatrix} -1/dx \\ 1/dx \end{bmatrix} [-1/dx \ 1/dx]\, dx$$
$$= \begin{bmatrix} +1 & -1 \\ -1 & +1 \end{bmatrix} \frac{1}{dx}.$$

De motsvarande integralerna i $dM(el)$ och $db(el)$ måste beräknas med lämpliga kvadraturregler, till exempel mittpunktsregeln.

Addera dS(el) till S

De rad- och kolonnindex i S som får bidrag av $dS = dS(el)$ ges av $t(:,el)$, d.v.s., S kan uppdateras med bidrag från element el enligt

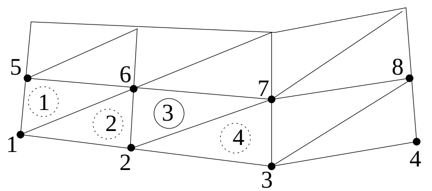
$$S(r,k) = S(r,k) + dS(el),$$

där $r = k = t(:,el)$. Till exempel, för element $el = 3$, d.v.s. I_3, har vi $t(:,el) = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$, och $dS(el)$ adderas till $\begin{bmatrix} S_{33} & S_{34} \\ S_{43} & S_{44} \end{bmatrix}$ i S.

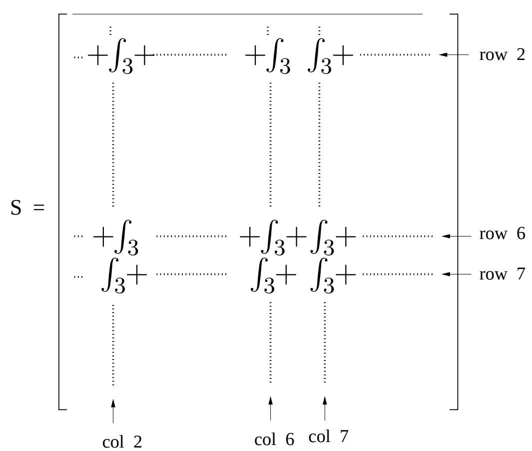
2D assemblering

Betrakta problemet

$$-\Delta u + u = f \quad \text{in } \Omega, \quad \partial_n u = 0, \quad \text{on } \partial\Omega,$$



2D assemblering

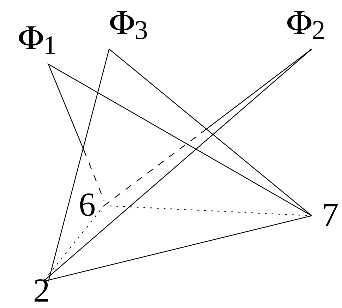


med lokala styvhetsmatrisen

2D assemblering

$$dS_3 = \begin{bmatrix} \int_{K_3} \nabla\Phi_1 \cdot \nabla\Phi_1 & \int_{K_3} \nabla\Phi_1 \cdot \nabla\Phi_2 & \int_{K_3} \nabla\Phi_1 \cdot \nabla\Phi_3 \\ \int_{K_3} \nabla\Phi_2 \cdot \nabla\Phi_1 & \int_{K_3} \nabla\Phi_2 \cdot \nabla\Phi_2 & \int_{K_3} .. \\ \int_{K_3} \nabla\Phi_3 \cdot \nabla\Phi_1 & \int_{K_3} .. & \int_{K_3} .. \end{bmatrix}$$

där



2D assemblering

Motsvarande datastrukturer för p och t är nu

$$p = \begin{bmatrix} . & p(1,2) & . & . & p(1,6) & p(1,7) & . \\ . & p(2,2) & . & . & p(2,6) & p(2,7) & . \end{bmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow x_1 - \text{ccords} \\ \leftarrow x_2 - \text{ccords} \end{array}$$

$$t = \begin{bmatrix} . & . & 2 & . & .. \\ . & . & 7 & . & .. \\ . & . & 6 & . & .. \end{bmatrix}$$

där element 3 har noder 2, 7 och 6, med x_1 och x_2 koordinater som finns i p.
Notera att numreringen 2, 7, 6 definierar en *lokal nodnumrering* av noderna som motsvarar de lokala basfunktionerna s Φ_1, Φ_2 och Φ_3 som i figuren.

2D assemblering

Elementlängden dx är nu elementarean dx, och basfunktionens derivatavektor är istället basfunktionens gradientmatris

$$DPhi = [\nabla\Phi_1 \quad \nabla\Phi_2 \quad \nabla\Phi_3], \quad \text{där } \nabla\Phi_j = \begin{bmatrix} \frac{\partial\Phi_j}{\partial x_1} \\ \frac{\partial\Phi_j}{\partial x_2} \end{bmatrix},$$

medan beräkningen av $dS(el)$ och additionen av dS till S ser ut som innan.

Icke-linjära problem

Exempel

$$-\text{div}(a(u)\,\text{grad}u) = f \quad \text{i } \Omega, \quad u = 0 \quad \text{på } \partial\Omega, \tag{1}$$

där $a(u)$ är en temperaturberoende värmekonduktivitet. Variationsformulering för problemet är

$$\int_\Omega \nabla v \cdot a(u)\nabla u = \int_\Omega v\,f \quad \forall v \text{ med } v = 0 \text{ på } \partial\Omega.$$

Finitelementmetoden använder ansatsen $U(x) = U_1\,\phi_1 + .. + U_m\,\phi_m$ som bestäms av

Diskreta problemet

$$\int_\Omega \nabla\phi_j \cdot a(U)\nabla U = \int_\Omega \phi_j\,f, \quad j = 1,..,m,$$

där $U = \begin{bmatrix} U_1 \\ . \\ . \\ U_m \end{bmatrix}$. Notera att detta nu är ett *icke-linjärt* ekvationssystem, som inte kan skrivas $AU = b$, med en given matris A. Istället,

$$A(U)\,U = b,$$

där

Diskreta problemet, forts.

$$A(U) = \begin{bmatrix} \int_\Omega \nabla\phi_1 \cdot a(U)\nabla\phi_1 & ... & \int_\Omega \nabla\phi_1 \cdot a(U)\nabla\phi_m \\ .. & ... & .. \\ \int_\Omega \nabla\phi_m \cdot a(U)\nabla\phi_1 & ... & \int_\Omega \nabla\phi_m \cdot a(U)\nabla\phi_m \end{bmatrix}.$$

Fixpunktsiteration

Den enklaste metoden för iterativ lösning av det icke-linjära ekvationssystemet för U är

$$A(U^{(j)})\,U^{(j+1)} = b,$$

som ger en följd $U^{(0)}$, $U^{(1)}$, $U^{(2)}$,.., med $U^{(j)} \to U$ om vi har tur.

Projekt

Projekt med FEM.

- Frivilligt. Kan ge upp till 5 bonuspoäng till tentan.
- Arbeta i grupper om två.
- Lös partiell differentialekvation i 2D.
- Matlab.
- Kortare skriftlig rapport med programkod.

Projekt, forts.

Tre projekt. Egna (goda) förslag är ok om ni först kollar med mig.

- Värmeledning i en slang.
- Neutronflöde i kärnreaktor.
- Vattenrörelse i ett badkar.

Uppgiftslapp kommer att finnas på hemsidan.