Partiella differentialekvationer F2, VT2005

Inlämningsuppgift 1

Låt

$$0 = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = 1, \quad x_k - x_{k-1} = h = \frac{1}{n},$$

och betrakta

$$V_h = \{f \in C[0,1] : f \text{ linjär på vart och ett av intervallen } [x_{k-1}, x_k], k = 1, \ldots, n\}.$$

(a) Visa att V_h är ett underrum i $C[0,1]$.

(b) Låt $\phi_k \in V_h$, $\phi_k(x_i) = \delta_{ik}$. Visa att funktionerna $\{\phi_k\}_{k=0}^{n}$ bildar en bas i V_h.

(c) Betrakta $V_h^0 = \{f \in V_h : f(0) = f(1) = 0\}$. Visa att V_h^0 är ett underrum i V_h och bestäm dess dimension.

(d) Låt $a(x)$ vara en kontinuerlig positiv funktion på intervallet $[0,1]$. Inför skalärprodukten $\langle f, g \rangle_a = \int_0^1 a(x) f'(x) g'(x) dx$. Visa att $\langle .,. \rangle_a$ verkligen definierar en skalärprodukt i V_h^0. Funktionerna i V_h^0 är egentligen inte deriverbara i $[0,1]$; hur ska man tolka integralen ovan?

(e) Låt $u(x) = \sin(\pi x)$, $n = 4$, $a(x) = 1$ för alla $x \in [0,1]$. Bestäm en funktion $U \in V_h^0$ sådan att $\langle u - U, v \rangle = 0$ för alla $v \in V_h^0$. Funktionen u tillhör inte V_h^0; i vilket rum är det naturligt att betrakta skalärprodukten? Ge en geometrisk tolkning av U och $\langle u - U, u - U \rangle^{\frac{1}{2}}$.

Inlämnas på föreläsningen måndagen den 11/4-05.