

Partiella differentialekvationer F, TMA690, 04/05

Maximumprincipen för linjära elliptiska PDE

SATS. Låt Ω vara ett begränsat område i $\mathbb{R}^n$ och antag att $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ är en lösning till den partiella differentialekvationen

$$Lu = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n b_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x)u = f(x),$$

där alla koefficienter och högerledet tillhör $C(\overline{\Omega})$, operatorns principdel uppfyller $\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \geq 0$ för alla $x \in \overline{\Omega}$ och $\xi \in \mathbb{R}^n$, samt $\max_{\overline{\Omega}} c(x) \leq c_0 < 0$.

Då gäller att: (i) Om $f \equiv 0$ och lösningen u inte är identiskt lika med 0, så kan u inte ha lokala extrema i Ω .

(ii) Lösningen u satisfierar aprioriuppskattningen

$$\max_{x \in \overline{\Omega}} |u(x)| \leq \max_{x \in \partial\Omega} |u(x)| + \frac{1}{|c_0|} \max_{x \in \overline{\Omega}} |f(x)|.$$

BEVIS: (i) Låt $f \equiv 0$. Det räcker att bevisa att u varken kan ha positivt lokalt maximum eller negativt lokalt minimum i en inre punkt i Ω (förklara varför!). Antag att u har positivt lokalt maximum i $x_0 \in \Omega$. Då gäller att

$$\frac{\partial u}{\partial x_i}(x_0) = 0 \quad \text{för alla } i = 1, 2, \dots, n.$$

Låt oss reducera operatorns principdel till kanonisk form i x_0 (det låter sig göras i en enskild punkt, oavsett rummets dimension). I punkten y_0 , som motsvarar x_0 i de nya koordinaterna, får vi då principdelen

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i \frac{\partial^2 u}{\partial y_i^2}(y_0),$$

där alla $\lambda_i \geq 0$ (eftersom L 's principdel motsvarades av en positivt semidefinit kvadratisk form). Lösningen har lokalt maximum i y_0 i de nya koordinaterna, vilket medför

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y_i^2}(y_0) \leq 0 \quad \text{för alla } i = 1, 2, \dots, n,$$

och vi får att

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x_0) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x_0) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \frac{\partial^2 u}{\partial y_i^2}(y_0) \leq 0.$$

Ur ekvationen följer då

$$\begin{aligned} 0 = Lu(x_0) &= \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x_0) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x_0) + \sum_{i=1}^n b_i(x_0) \frac{\partial u}{\partial x_i}(x_0) + c(x_0)u(x_0) \leq \\ &\leq 0 + 0 + c(x_0)u(x_0) < c_0 u(x_0) < 0, \end{aligned}$$

vilket är en motsägelse. På samma sätt visas att u inte kan ha negativt lokalt minimum i en inre punkt.

(ii) Uppskattningen kommer uppenbarligen att gälla om $\max_{x \in \bar{\Omega}} |u(x)|$ antas på randen. Om $\max_{x \in \bar{\Omega}} |u(x)|$ antas i en inre punkt måste det handla om ett positivt lokalt maximum eller ett negativt lokalt minimum. Antag att $\max_{x \in \bar{\Omega}} |u(x)| = u(x_0)$, där $x_0 \in \Omega$ och u har positivt lokalt maximum i x_0 . Som förut får vi

$$\begin{aligned} f(x_0) = Lu(x_0) &= \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x_0) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x_0) + \sum_{i=1}^n b_i(x_0) \frac{\partial u}{\partial x_i}(x_0) + c(x_0)u(x_0) \leq \\ &\leq 0 + 0 + c(x_0)u(x_0), \end{aligned}$$

vilket medför att (observera att $c(x_0) < 0$)

$$\max_{x \in \bar{\Omega}} |u(x)| = u(x_0) \leq \frac{f(x_0)}{c(x_0)} = \left| \frac{f(x_0)}{c(x_0)} \right| \leq \frac{1}{|c_0|} |f(x_0)| \leq \frac{1}{|c_0|} \max_{x \in \bar{\Omega}} |f(x)|.$$

Fallet med negativt lokalt minimum hanteras analogt. Beviset är därmed klart.

SATS. (Entydighet) Randvärdesproblemet

$$\begin{aligned} Lu &= f \quad \text{i } \Omega, \\ u|_{\partial\Omega} &= \varphi, \end{aligned}$$

har högst en klassisk lösning.

BEVIS: Givet två lösningar, måste deras skillnad v vara lösning till

$$\begin{aligned} Lv &= 0 \quad \text{i } \Omega, \\ v|_{\partial\Omega} &= 0, \end{aligned}$$

på grund av lineariteten. Ur aprioriuppskattningen följer då att

$$\max_{x \in \bar{\Omega}} |v(x)| \leq 0 + 0,$$

och därmed $v \equiv 0$.

ANMÄRKNING. Antagandet om koefficienternas och högerledets kontinuitet kan försvagas något. Läs igenom beviset noga och försök avgöra vad man kan anta istället.