

Partiella differentialekvationer F, TMA690, 04/05

Poincarés olikhet (a.k.a. Friedrichs olikhet)

SATS. Låt Ω vara ett begränsat område i $\mathbb{R}^n$ med rand $\partial\Omega \in C^1$ (åtminstone styckvis). Låt $u \in H_0^1(\Omega)$ (reell funktion). Då gäller olikheten

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C_\Omega \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}.$$

BEVIS: Betrakta funktionen φ som definieras av

$$\varphi(x) = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^n x_i^2.$$

Det är uppenbart att $\Delta\varphi \equiv 1$. Greens asymmetriska formel för funktionerna u^2 och φ ger då

$$\|u\|_{L^2(\Omega)}^2 = \int_{\Omega} u^2 dx = \int_{\Omega} u^2 \Delta\varphi dx = - \int_{\Omega} 2u(\nabla u \cdot \nabla \varphi) dx + 0,$$

eftersom $u \in H_0^1(\Omega)$. Välj nu konstanten C_Ω så att $2 \max |\nabla \varphi| \leq C_\Omega$ i Ω (det är uppenbart att detta låter sig göras, eftersom $\nabla \varphi(x) = \frac{1}{n}x$ och området Ω är begränsat). Vi använder nu Cauchy-Schwarzs olikhet två gånger, en gång i $\mathbb{R}^n$ och en gång i $L^2(\Omega)$, och får

$$\begin{aligned} \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 &\leq \int_{\Omega} 2|u| |\nabla u \cdot \nabla \varphi| dx \leq \int_{\Omega} 2|u| |\nabla u| |\nabla \varphi| dx \leq \\ &\leq C_\Omega \int_{\Omega} |u| |\nabla u| dx \leq C_\Omega \|u\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}, \end{aligned}$$

och olikheten följer.

SATS. Den bilinjära funktionalen

$$\langle u, v \rangle_{H_0^1} = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx,$$

är en skalärprodukt i $H_0^1(\Omega)$. Normen som genereras av $\langle u, v \rangle_{H_0^1}$ är ekvivalent med H^1 -normen på $H_0^1(\Omega)$.

BEVIS: Följer direkt ur uppskattningen

$$\|u\|_{H_0^1}^2 \leq \|u\|_{H^1}^2 \leq (C_\Omega^2 + 1)\|u\|_{H_0^1}^2,$$

för alla $u \in H_0^1(\Omega)$.

ANMÄRKNING. Normernas ekvivalens medför att funktionsrummet $H_0^1(\Omega)$ är fullständigt även m.a.p. H_0^1 -normen (fyll i detaljerna!), vilket i sin tur gör det möjligt att använda Riesz's representationssats och få existens av en funktion $u \in H_0^1(\Omega)$ sådan att

$$\langle u, v \rangle_{H_0^1} = \langle f, v \rangle_{L^2(\Omega)} \quad \forall v \in H_0^1(\Omega),$$

d.v.s. existens av svag lösning för Dirichlets problem

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f \quad \text{i } \Omega, \\ u|_{\partial\Omega} &= 0. \end{aligned}$$