Partiella differentialekvationer F, TMA690, 04/05

Rieszs representationssats

En följd $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ i ett normerat rum kallas Cauchyföljd om

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N : \ \forall m, n > N \quad ||x_m - x_n|| < \varepsilon.$$

Alla konvergenta följder är Cauchyföljder (visa det!). Ett rum kallas fullständigt om även det omvända påståendet är sant, d.v.s. om alla Cauchyföljder i rummet konvergerar mot ett element i rummet. Ett fullständigt normerat rum kallas Banachrum. Exempel på Banachrum är $\mathbb{R}$ (oavsett norm), $\mathbb{R}^n$ (oavsett norm), $C[a, b]$ med max-normen, $L^2(\Omega)$ med L^2-normen, $H^1(\Omega)$ med H^1-normen, $H_0^1(\Omega)$ med H^1-normen, $H_0^1(\Omega)$ med H_0^1-normen. Exempel på icke-fullständiga rum är $\mathbb{Q}$ (med den vanliga $|\cdot|$-normen), $C[a, b]$ med L^2-normen.

Ett linjärt rum med skalärprodukt H kallas Hilbertrum om det är fullständigt m.a.p. den norm som genereras av skalärprodukten, d.v.s. om alla Cauchyföljder i H konvergerar mot element i H. Exempel på Hilbertrum är $\mathbb{R}$ med den vanliga skalärprodukten, $L^2(\Omega)$ med L^2-skalärprodukten, $H^1(\Omega)$ med H^1-skalärprodukten, $H_0^1(\Omega)$ med H^1-skalärprodukten, $H_0^1(\Omega)$ med H_0^1-skalärprodukten.

En linjär avbildning från ett normerat rum X till $\mathbb{R}$ (eventuellt $\mathbb{C}$) kallas linjär funktional. En linjär funktional f på X kallas begränsad om det finns en konstant C sådan att

$$|f(x)| \leq C\,||x|| \qquad \forall x \in X.$$

En linjär funktional är begränsad om och endast om den är kontinuerlig. Mängden av alla begränsade linjära funktionaler på X kallas X:s dualrum och betecknas med X^*. Även X^* är ett normerat linjärt rum, där

$$(\alpha f_1 + \beta f_2)(x) = \alpha f_1(x) + \beta f_2(x) \quad \forall x \in X, \qquad ||f|| = \sup_{||x||=1} |f(x)|.$$

Om H är ett Hilbertrum och $x_0 \in H$, kan vi definiera en linjär funktional f med likheten

$$f(x) = \langle x, x_0 \rangle \qquad \forall x \in H.$$

Ur Cauchy-Schwarzs olikhet följer att f är begränsad samt att $||f|| \leq ||x_0||$. Eftersom dessutom

$$f\left(\frac{x_0}{||x_0||}\right) = \frac{1}{||x_0||}\langle x_0, x_0 \rangle = ||x_0||,$$

får vi att $||f||_{H^*} = ||x_0||_H$. Rieszs representationssats säger att alla begränsade linjära funktionaler på H fås på det viset, d.v.s. att $H^* \simeq H$.

Lemma. Låt H vara ett Hilbertrum och låt f vara en begränsad linjär funktional på H. Då gäller att

$$\dim N(f)^\perp = 0 \quad \text{om} \quad f = 0,$$

och

$$\dim N(f)^\perp = 1 \quad \text{om} \quad f \neq 0.$$

Bevis: Om $f = 0$, så har vi att $N(f) = H$ och $N(f)^\perp = \{0\}$. Låt nu $f \neq 0$. Nollrummet till f är ett slutet underrum i H (eftersom f är kontinuerlig) och satsen om ortogonalprojektion ger $H = N(f) \oplus N(f)^\perp$ (d.v.s. för varje $x \in H$ finns entydigt bestämda $y \in N(f),\ z \in N(f)^\perp$, sådana att $x = y + z$). Tag $x \in H$ sådant att $f(x) \neq 0$. Motsvarande z måste då vara skilt från 0 (annars får vi $x = y \in N(f)$). Det betyder att $\dim N(f)^\perp \geq 1$. Antag nu att z_1, z_2 är två element i $\dim N(f)^\perp$. Eftersom $f(z_1), f(z_2) \neq 0$, kan vi välja $\alpha \in \mathbb{R}$ så att $f(z_1) + \alpha f(z_2) = 0$. Lineariteten ger då $f(z_1 + \alpha z_2) = 0$. Eftersom $N(f)^\perp$ är linjärt rum, följer att $z_1 + \alpha z_2 \in N(f)^\perp$, d.v.s. $z_1 + \alpha z_2 \in N(f) \cap N(f)^\perp$. Men, $N(f) \cap N(f)^\perp = \{0\}$, alltså är z_1, z_2 linjärt beroende och $\dim N(f)^\perp \leq 1$. Tillsammans med olikheten vi fick ovan ger detta $\dim N(f)^\perp = 1$.

Sats. (Frigyes Riesz) Låt H vara ett Hilbertrum och låt f vara en begränsad linjär funktional på H. Då finns ett entydigt bestämt element $x_0 \in H$ sådant att

$$f(x) = \langle x, x_0 \rangle \qquad \forall x \in H.$$

Dessutom gäller att $||f|| = ||x_0||$.

Bevis: För $f = 0$, välj $x_0 = 0$. Om $f \neq 0$, tag $z_0 \in N(f)^\perp$ sådant att $||z_0|| = 1$ (ett sådant element finns enligt lemmat, ty $\dim N(f)^\perp = 1$). För alla $x \in H$ kan vi nu skriva

$$x = x - \langle x, z_0 \rangle z_0 + \langle x, z_0 \rangle z_0.$$

Eftersom $x - \langle x, z_0 \rangle z_0 \perp z_0$, får vi att $x - \langle x, z_0 \rangle z_0 \in (N(f)^\perp)^\perp$. Av entydigheten i satsen om ortogonalprojektion följer att $(N(f)^\perp)^\perp = N(f)$: det är å ena sidan uppenbart att $N(f) \subset (N(f)^\perp)^\perp$; å andra sidan, om $y \in (N(f)^\perp)^\perp$ och $y = y_1 + z_1$, där $y_1 \in N(f)$ och $z_1 \in N(f)^\perp$, så får vi att $y_1 \in N(f) \subset N(f)^\perp$ och p.g.a. entydigheten i $H = N(f)^\perp \oplus (N(f)^\perp)^\perp$, måste $y = y_1,\ z_1 = 0$, vilket ger att $(N(f)^\perp)^\perp = N(f)$.

Vi har alltså att $x - \langle x, z_0 \rangle z_0 \in N(f)$, vilket är samma som att $f(x - \langle x, z_0 \rangle z_0) = f(x) - \langle x, z_0 \rangle f(z_0) = f(x) - \langle x, f(z_0) z_0 \rangle = 0$ och vi får det önskade resultatet med $x_0 = f(z_0) z_0$.

Antag nu att det finns två element i H, x_1 och x_2, med egenskapen $f(x) = \langle x, x_1 \rangle = \langle x, x_2 \rangle \quad \forall x \in H$. Av det följer att $\langle x, x_1 - x_2 \rangle = 0 \quad \forall x \in H$ och genom att välja $x = x_1 - x_2$ får vi $||x_1 - x_2||^2 = 0$, d.v.s. $x_1 = x_2$.

Påståendet om normen har vi redan visat.

Anmärkning. Antagandet om fullständighet är väsentligt. Betrakta den linjära funktionalen $l : C[-1,1] \to \mathbb{R}$, där $C[-1,1]$ är utrustat med L^2-skalärprodukt och

$$l(f) = \int_0^1 f(x)dx.$$

Visa att

(i) $N(l) \neq C[-1,1]$;

(ii) $N(l)^\perp = \{0\}$;

(iii) det finns ingen funktion $\varphi \in C[-1,1]$ sådan att $l(f) = \int_{-1}^1 \varphi(x)f(x)dx$ för alla $f \in C[-1,1]$.