TMA 690
Matematik CTH
Tentamensskrivning i Partiella differentialekvationer F
Datum: 2005-08-15, kl. 14.00 - 18.00.
Hjälpmedel: Inga, ej heller räknedosa.
Telefonvakt: Christoffer Cromvik, tel. 0762-721860, besöker salen ca 15.00 och 17.00.
OBS! Linje, inskrivningsår och personnummer skall anges på skrivningsomslaget.

==

1. Finn den allmänna lösningen till differentialekvationen

$$x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2x\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0. \qquad (6p)$$

2. Lös begynnelse- och randvärdesproblemet

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad x > 0,\ t > 0;$$
$$u(x,0) = 0,\ u_t(x,0) = 0,\ x > 0; \quad u(0,t) = \mu(t),\ t > 0,$$

där $\mu \in C^2[0,\infty),\ \mu(0) = \mu'(0) = \mu''(0) = 0$. Ge en fysikalisk tolkning för problemet och lösningen. (8p)

3. Låt Ω vara ett begränsat område i $\mathbb{R}^n$ (du kan välja $n = 2$) och låt $C_T = \Omega \times (0,T]$. Antag att $u \in C^2(\overline{C}_T)$ är en lösning till $u_t - \Delta u = f$ i C_T, sådan att $u = 0$ på $\partial\Omega \times [0,T]$. Visa att

$$\int_\Omega u^2(x,s)\,dx \le \int_\Omega u^2(x,0)\,dx + 2\int_{C_s} |u|\,|f|\,dx\,dt. \qquad (8p)$$

4. En begränsad tredimensionell kropp Ω utsätts för en periodisk yttre påverkan $F(x,t) = a^2 f(x) e^{i\omega t}$. Kroppens vibrationer beskrivs av vågekvationen

$$\frac{\partial^2 \cdot}{\partial t^2} - a^2 \Delta \cdot = F(x,t).$$

(a) Om $u = u(x)$ är amplituden för Ω:s vibrationer och frekvensen är densamma som i den yttre kraften, härled en differentialekvation för $u(x)$. (2p)

Förutsatt att du har räknat rätt, har du nu för $u(x)$ fått Helmholtz ekvation

$$\Delta u + k^2 u = -f \qquad \text{i} \quad \Omega \qquad (k \text{ antas vara positiv}).$$

Uppgiften går ut på att visa en motsvarighet till medelvärdesegenskapen för lösningarna till Helmholtz homogena ekvation $\Delta u + k^2 u = 0$.

Antag att $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ är ett (öppet) område och låt $x_0 \in \Omega$ samt låt $u \in C^2(\Omega)$ vara en lösning till $\Delta u + k^2 u = 0$. Definiera

$$I(r) = \frac{1}{4\pi r^2} \iint_{S_r(x_0)} u\, dS.$$

(b) Visa att I satisfierar $r^2 I''(r) + 2rI'(r) + k^2 r^2 I(r) = 0$. (4p)

(c) Finn $I(r)$. (Tips: Gör substitutionen $Y = rI$; bestäm konstanterna givet definitionen för I.) (4p)

(d) Härled för lösningen u en motsvarighet till harmoniska funktioners medelvärdesegenskap. (2p)

5(a). Ange variationsformuleringen för Dirichlets problem med homogena randvillkor för Laplaces operator för ett område i $\mathbb{R}^n$ ($\mathbb{R}^2$). (2p)

(b) Formulera och bevisa Poincarés (Friedrichs) olikhet. (4p)

(c) Visa att H^1- och H_0^1-normerna är ekvivalenta i $H_0^1(\Omega)$, där Ω är ett begränsat område i $\mathbb{R}^n$ ($\mathbb{R}^2$). (4p)

6. Formulera och bevisa en a priori feluppskattning i H^1-norm för FEM-lösningen. (6p)